

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：17201

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2023

課題番号：18K13442

研究課題名（和文）非線形分散型方程式の幾何学的対称性と共鳴現象の解析

研究課題名（英文）Analysis of resonant effects and geometric symmetry on nonlinear dispersive equations

研究代表者

加藤 孝盛 (Kato, Takamori)

佐賀大学・理工学部・講師

研究者番号：50620639

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：1次元トーラス上で可積分系である5次KdV方程式の係数を一般化した5次KdV型方程式の初期値問題を考察し、非線形項を超関数として意味付けできる最良のクラスにおいて、適切性及び無条件一意性を示した。本研究において、線形化方程式の解の摂動とみなせない非線形相互作用である共鳴部分をどのように扱うかが鍵となる。我々は方程式が持つ対称性を積極的に利用するにより、問題となる共鳴部分が明示的に局在化され、保存量などを用いることで相殺できることを発見した。また、この手法を応用することにより、トーラス上の5次修正KdV型方程式と3次Benjamin-Ono型方程式に対して、既存の結果を改良した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、実際の物理現象を記述するモデルあるいはその近似モデルとなる偏微分方程式を扱う。実際の現象は様々な設定で考察されるが、数値計算を実行する上で周期境界条件は最も自然な設定である。そのため、周期境界条件下で偏微分方程式に対する適切性(解の一意存在及び初期値に関する連続依存性)及び非適切性を厳密に示すことは、数値シミュレーションの正当性やモデルとなる方程式と実際の現象との整合性を判定する際に大きな役割を担う。

研究成果の概要（英文）：We considered the Cauchy problem of fifth order KdV type equations on the one-dimensional torus. We proved the well-posedness and unconditional uniqueness. This result is optimal in the sense that the nonlinear terms can be defined as the distribution. The key of this study is how to deal with the resonant parts which cannot be regarded as the perturbation of the linearized solution. By symmetry of the equation, we found that the resonant parts are exactly localized and can be cancelled by some conserved quantities.

Moreover, we obtained the improved results of fifth order modified KdV type equations and third order Benjamin-Ono type equations on the torus.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形分散型方程式 初期値問題 適切性 周期境界条件 無条件一意性

## 1. 研究開始当初の背景

非線形分散型方程式は、ある種の平滑化効果を示唆する分散性と特異性を示唆する非線形性という相異なる二つの性質をあわせ持ち、その解析方法は分散性と非線形性のバランスに大きく依存する。非線形分散型方程式の初期値問題の適切性の研究は、初期においては、線形方程式の研究で構築された評価式を非線形方程式に応用したものに過ぎなかったが、Bourgain の Fourier 制限法や Shatah の normal form 法に開発を皮切りに大きな進展を遂げた。これらの手法は、方程式の分散構造を示唆する線形化方程式の解の性質と非線形項が持つ幾何学的性質を同時に利用することを可能にした。これにより、方程式が持つ振動効果を上手く取り出すことができ、非共鳴部分に対して精密な多重線形評価式が構築された。このように非共鳴部分に対しては、ある程度の汎用性のある手法が確立されつつある一方で、共鳴部分は、その構造が方程式の特徴に大きく依存するため、個々の方程式に対する解析が必要になる。ここで共鳴部分とは、線形部分の周波数成分と非線形項のそれとがちょうどつり合い振動効果が相殺される非線形相互作用を指す。本研究では、方程式が持つ対称性などのある種代数的な構造を利用し、共鳴部分を解析することが重要になる。

## 2. 研究の目的

線形化方程式の解の摂動とは捉えられない非線形項を持つ(直接的な逐次近似法が機能しない)非線形分散型方程式の初期値問題を考察し、適切性が成立するか否かを判別することを目指す。その足がかりとして、高次 KdV 方程式や高次修正 KdV 方程式などの豊富な対称性を持つ非線形分散型方程式を対象とし、肯定的な結果の解明を目指す。Fourier 制限法や normal form 法による非共鳴部分に対する多重線形評価の整備が進む中で、線形化方程式の解の摂動とみなせない非線形相互作用は微分の損失を持つ共鳴部分に集中することが分かってきた。そこで我々は、方程式が持つある意味で代数的構造を示唆する対称性を上手く利用することにより、問題となる共鳴部分を相殺することができると予想する。また研究が進展する過程で、保存則などの方程式が持つ対称性と微分の損失を持つ共鳴部分の相殺条件との関係性に関する明示的な表現を与えることを目指す。

## 3. 研究の方法

非線形分散型方程式で豊富な対称性を持つ KdV, 修正 KdV, Schrodinger や Benjamin-Ono 階層に属する高次の方程式を研究対象とする。また物理現象を記述する近似モデルを含むように上で述べた方程式の係数を一般化した方程式のクラスを扱う。これらの方程式は可積分系とは限らないため、可積分系に特化した手法である逆散乱法が機能しないことに注意する。これらの方程式において、微分の損失を持つ共鳴部分が、解写像の線形化方程式の解のまわりでの Taylor 展開の高次の項に現れることが困難な点となる。そこで方程式の対称性を上手く利用することにより、問題となる共鳴部分は、強く局在化され、具体的に表現することができる。そのため、保存量など利用した適当な変換により方程式を変形することでその共鳴部分を相殺できると予想する。また非共鳴部分に対しては、Fourier 制限法や normal form 法を利用し、振動効果による平滑化効果を引き出すことにより、精密な評価の構築が期待できる。

## 4. 研究成果

(1) 1次元トーラスにおいて KdV 階層に属する 5 次 KdV 方程式の係数を一般化した 5 次 KdV

型方程式の初期値問題を考察し、非線形項を超関数の意味で正当化できる最良の初期値クラスにおいて適切性と無条件一意性を示した。ここで無条件一意性とは、解の構成法に依らず一意性が成立することを示唆するものである。微分の損失を持つ共鳴部分は、研究の方法で述べたように元の方程式に積分平均が保存することを利用した変換を施すことで相殺できる。一方で非共鳴部分において、複数個の微分の損失が生じるため、通常の Fourier 制限が機能しないことが問題となる。そこで複数回 normal form 法を繰り返し、微分の損失を回復することが可能であったが、この際に現れる非線形項に対して系統的な評価式を構築することができず、各項個別の評価が必要になり、膨大な場合分けを避けることができなかつた。これにより、研究開始時の目論見が外れてしまい、研究の進展が大幅に遅れてしまった。

(2) 1次元トラス上で5次修正 KdV 型方程式の初期値問題を考察し、ほぼ5次 KdV 型方程式と同様の議論を展開することで、ある意味最良の初期値クラスにおける適切性と無条件一意性を示した。5次 KdV 型方程式との相違点は、振動関数が自明な因数分解を持たないため、微分の損失を持つ共鳴部分の対称性を抽出するために、より繊細な場合分けが必要になった部分にある。

(3) 1次元トラス上で3次 Benjamin-Ono 型方程式の初期値問題を考察し、エネルギー空間における時間大域的適切性と無条件一意性を示した。直接的に Fourier 制限法や normal form 法を利用しても、非共鳴部分の微分の損失を回復することはできない。そこで方程式にゲージ変換を適用し、2つの方程式のシステムに変形する。ここで一方の方程式の非共鳴部分の特異性は緩和されるが、他方の方程式における特異性は弱まっていないことに注意する。そこで、特異性が緩和された部分が上手く反映されるように、微分の損失を持つ共鳴部分を相殺する変形を施し、その非共鳴部分の損失を normal form 法により回復した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Takamori Kato	4. 巻 B70
2. 論文標題 Unconditional well-posedness of fifth order KdV type equations with periodic boundary condition	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 105-129
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 10件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Takamori Kato
2. 発表標題 Unconditional well-posedness for third order Benjamin-Ono type equations on the torus
3. 学会等名 French-Japanese one day meeting in Tours（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 加藤孝盛
2. 発表標題 Unconditional well-posedness for fifth order KdV type equations on the torus
3. 学会等名 第61回実函数論・函数解析学合同シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 加藤孝盛
2. 発表標題 周期境界条件下での5次mKdV方程式に対する適切生と無条件一意性
3. 学会等名 The 19th Linear and Nonlinear Waves（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 加藤孝盛
2. 発表標題 周期条件境界下での5次KdV方程式に対する適切性と無条件一意性
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 加藤孝盛
2. 発表標題 Well-posedness in the energy space for the third order Benjamin-Ono equation on the torus
3. 学会等名 長崎偏微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤孝盛
2. 発表標題 Well-posedness in the energy space for third order type Benjamin-Ono equations on the torus
3. 学会等名 第19回調和解析中央大セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤孝盛
2. 発表標題 4次微分型シュレディンガー方程式に対する初期値問題の適切性
3. 学会等名 第141回日本数学会九州支部会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 加藤孝盛
2. 発表標題 Local well-posedness for the periodic fourth order derivative nonlinear Schrodinger equation
3. 学会等名 RIMS共同研究「線形および非線形方程式の研究」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takamori Kato
2. 発表標題 Almost sure global well-posedness for fourth order Schrodinger type equations on the torus
3. 学会等名 Workshop on Stochastic partial differential equations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 加藤孝盛
2. 発表標題 Well-posedness for the higher order Benjamin-Ono equation on the torus
3. 学会等名 信州大学偏微分方程式研究集会(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 加藤孝盛
2. 発表標題 Well-posedness for the higher order Benjamin-Ono equation on the torus
3. 学会等名 Nonlinear Dispersive equations in Kumamoto 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------