

令和 4 年 6 月 24 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13445

研究課題名(和文)非有界な係数をもつ2階楕円型作用素の理論の展開と応用

研究課題名(英文)Studies on the theory of elliptic operators with unbounded coefficients and applications

研究代表者

側島 基宏(Sobajima, Motohiro)

東京理科大学・理工学部数学科・講師

研究者番号：20760367

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、非有界な係数をもつ2階の楕円型作用素の理論の更なる発展と応用に注力した。偏微分方程式の枠組みでは、線形問題の本質を解明し、それを非線形問題に対して応用する、というような立場をとる。線形の枠組みの成果のひとつとして、有界領域上でのRellich不等式がある。有界領域上で係数に特異性をもつ楕円型作用素に対するもので、不等式が成立する必要十分条件を作用素がもつパラメータを用いて陽に表すことができた。また、偏微分方程式の線形・非線形問題への成果として、空間変数に依存する消散型波動方程式の線形解の長時間挙動、非線形解の解の爆発に関する解析および大域解の存在等を扱った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非有界な係数をもつ2階楕円型作用素は様々な自然現象を記述する際に用いられる。この研究で、空間変数に依存する消散型波動方程式の長時間挙動に非有界な拡散構造を見ることができた。これは既存の研究からは得られない知見であり、同種の現象が他のモデルにも内在する可能性を示唆している。このことから、今後さらに非有界な係数という枠組みの重要性が高まったと考えている。

研究成果の概要(英文)：In this research, we focus our attention to the development and applications to the theory of second order elliptic operators with unbounded coefficients. In the framework of partial differential equations, we try to find essentials of linear problems and to apply it to the corresponding nonlinear problems. One of the achievement in the linear problem is the Rellich inequalities in bounded domains. We found the necessary and sufficient conditions on the validity of Rellich inequalities with the Laplacian perturbed by the singular lower order terms. For the nonlinear problem, we discussed the large time behavior of solutions to linear wave equations with space-dependent damping terms, blowup phenomena and global existence for the corresponding nonlinear problems.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非有界な係数をもつ楕円型作用素 消散型波動方程式 漸近展開

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

非有界な係数をもつ 2 階楕円型作用素の理論を研究する流れは 2000 年頃からみられるようになり、研究代表者もその流れに乗って研究を進めてきた。本研究は、それらの理論の深化と偏微分方程式への応用を模索するものである。

特に、空間変数に依存する摩擦項をもつ波動方程式の長時間挙動は、方程式自体には非有界性を伴う因子は現れないものの、長時間挙動が満たす方程式には非有界拡散が現れる。楕円型作用素の理論を中心に添え、この現象を俯瞰することを目標に掲げている。

2. 研究の目的

上記に挙げた消散型波動方程式にかかわらず、偏微分方程式に内在する楕円型作用素の構造を抽出する手法を確立することが本研究の主眼である。手法の確立を目指すうえで、注目すべき構造をもつ消散型波動方程式からの抽出法の整備を目指した。

3. 研究の方法

空間変数に依存する消散型波動方程式の解析方法はそれほど多くない。時間変数に依存する場合は、フーリエ変換が強力な道具としてよく知られているが、本研究対象の場合は、エネルギー法による解析が主流と思われる。このエネルギー法による解析法の深化の方向性を探る。

関連する話題として、同方程式の非線形問題の解析を行う。非線形問題の解の爆発現象をとらえるための方法として、テスト関数法がある。このテスト関数法を用いた議論により、研究代表者は池田正弘氏（理化学研究所・慶応義塾大学）との以前の共同研究で、(偶然にも)空間 2 次元外部領域における特殊な現象を発見した。このテスト関数法の深化あるいは俯瞰する研究も急務である。

4. 研究成果

< 1 > 2 階楕円型作用素に関する関数不等式について

この項目では、非有界、特に特異な係数をもつ 2 階楕円型作用素を含む関数不等式について扱っている。以前の研究 (G. Metafune 氏、C. Spina 氏との共同研究) では、空間のスケール構造に着目することで、 n 次元ユークリッド空間上の (重み付き) レリッヒ不等式を扱ったが、その発展として、本課題においてスケール構造をもたない n 次元ユークリッド空間の部分集合に対して同不等式を扱い、空間 L^p の指数 p を含む、すべてのパラメータに関する同不等式の成立条件を導き出すことに成功している (G. Metafune 氏、L. Negro 氏、C. Spina 氏との共同研究)。

< 2 > 消散型波動方程式の非線形問題の爆発現象について

この項目は、テスト関数法の再考により得られた研究成果である。まず、時間変数に依存する係数をもつ半線形消散型波動方程式の解のふるまいを調べた。この方程式は、摩擦係数が早く減衰する場合・早く増大する場合・それ以外のそれぞれの場合に解の挙動が本質的に変化することが知られている。ここでは、「それ以外」に分類されるより一般の係数に対して、解の最大存在時間を詳細に調べた (池田正弘氏、若杉勇太氏との共同研究)。

摩擦項がない場合の非線形問題にも (波動方程式の特徴を反映した) テスト関数法が確立されているが、一般的な手法は同方程式の境界値問題には適用できない。本課題において、単位球の外部という特殊な状況ではあるものの、半線形波動方程式の境界値問題に対して適用可能なテスト関数法の枠組みを整備した (若狭恭平氏との共同研究)。また、波動方程式のスケール構造を保つ特異な摩擦項およびポテンシャル項を含む場合は、Wei Dai 氏と久保英夫氏との共同研究で扱っている。

また、非線形シュレディンガー方程式の解の爆発現象についても、テスト関数法による解析が有効である。ここでは、宮崎隼人氏との共同研究で、空間遠方の初期値の情報を用いることで、既存のテスト関数法による解の最大存在時間の評価を改良することに成功している。

< 3 > 線形消散型波動方程式の長時間挙動

線形の消散型波動方程式の長時間挙動の解析手法として、時間変数に対する漸近展開を行う方法がある。n次元ユークリッド空間上の消散型波動方程式についてのみ知られており、より一般的な枠組みでの漸近展開の構成法は知られていなかった。本課題の成果のひとつとして、ヒルベルト空間上の微分方程式という抽象的な枠組みで、同等の漸近展開の構成法を確立したことがある。同手法は時間および空間に依存する摩擦項をもつ消散型波動方程式への応用も可能で、それらに対する漸近展開も本課題において確立した(空間に依存する場合の研究は若杉勇太氏との共同研究)。

上で提案した漸近展開の手法は、ある種の特異極限問題にも応用可能であることがわかってきた。パラメータ付きの消散型波動方程式を考えると、極限の方程式として熱方程式が現れることが知られている。誤差評価はすでに(1960年代に)得られているが、その評価に関する全く別の導出法を提案した(池畠良氏との共同研究)。

< 4 > 非線形問題の大域解について

この項目では、主に、重み付きエネルギー法によるべき乗型非線形項(未知関数の大きさのp乗)をもつ消散型波動方程式の大域解の構成に焦点を当てている。

大域解の存在・非存在を隔てるpの閾値を臨界指数というが、若杉勇太氏、西原健二氏との共同研究で扱ったのは、空間遠方で増大する摩擦項をもつ場合の非線形問題の臨界指数の特定である(つまり、大域解の存在・非存在を扱った)。ここで用いたのはよく知られている指数型の重みを用いたエネルギー法である。一方で、合流型超幾何関数を用いた多項式型の重みを用いたエネルギー法による(摩擦係数が定数の場合の)大域解の構成も本課題での成果といえる。波動方程式のスケール構造を保つ特異な摩擦項を伴う場合も、結合定数がある程度大きい場合にべき乗型非線形項の臨界指数を特定している。

最後に、空間2次元外部領域の場合に、弱結合型の非線形熱方程式系に対して臨界ケースで大域解の構成に成功した。空間2次元全空間の場合には大域解の非存在が知られており、この現象は2次元外部領域の特殊性が強く反映された現象と理解できる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Sobajima Motohiro	4. 巻 -
2. 論文標題 On global existence for semilinear wave equations with space-dependent critical damping	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sobajima Motohiro	4. 巻 327
2. 論文標題 Higher-order asymptotic expansion for abstract linear second-order differential equations with time-dependent coefficients	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 226 ~ 258
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2022.04.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sobajima Motohiro	4. 巻 501
2. 論文標題 Global existence of solutions to a weakly coupled critical parabolic system in two-dimensional exterior domains	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 125214
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2021.125214	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hayato Miyazaki, Motohiro Sobajima	4. 巻 -
2. 論文標題 Lifespan of solutions to nonlinear Schrödinger equations with general homogeneous nonlinearity of the critical order	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Harmonic Analysis and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 197-207
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Dai Wei, Kubo Hideo, Sobajima Motohiro	4. 巻 57
2. 論文標題 Blow-up for Strauss type wave equation with damping and potential	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis: Real World Applications	6. 最初と最後の頁 103195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nonrwa.2020.103195	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 SOBAJIMA Motohiro, WAKASUGI Yuta	4. 巻 -
2. 論文標題 Supersolutions for parabolic equations with unbounded or degenerate diffusion coefficients and their applications to some classes of parabolic and hyperbolic equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/83928392	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motohiro Sobajima, Yuta Wakasugi	4. 巻 -
2. 論文標題 Remark on one dimensional semilinear damped wave equation in a critical weighted L^2 -space	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDEs	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiro Ikeda, Motohiro Sobajima, Yuta Wakasugi	4. 巻 16
2. 論文標題 Sharp lifespan estimates of blowup solutions to semilinear wave equations with time-dependent effective damping	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Hyperbolic Differential Equations	6. 最初と最後の頁 495-517
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219891619500176	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motohiro Sobajima, Kyouhei Wakasa	4. 巻 484
2. 論文標題 Finite time blowup of solutions to semilinear wave equation in an exterior domain	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 123667
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2019.123667	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Motohiro Sobajima	4. 巻 32
2. 論文標題 Global existence of solutions to semilinear damped wave equation with slowly decaying initial data in exterior domain	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 615-638
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Giorgio Metafuno, Luigi Negro, Motohiro Sobajima, Chiara Spina	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Rellich inequalities in bounded domains	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-019-01947-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Motohiro Sobajima	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Higher order asymptotic expansion of solutions to abstract linear hyperbolic equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-020-01959-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kenji Nishihara, Motohiro Sobajima, Yuta Wakasugi	4. 巻 25
2. 論文標題 Critical exponent for the semilinear wave equations with a damping increasing in the far field	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 25:55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-018-0546-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計14件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 Weighted energy estimates for wave equations with space-dependent damping
3. 学会等名 2022 日本数学会年会 函数方程式論分科会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 On asymptotic expansion for solutions of damped wave equations in exterior domains
3. 学会等名 第12回 名古屋微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 Global existence for a critical weakly coupled parabolic system in 2d-exterior domain
3. 学会等名 the VI Italian-Japanese Workshop "Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 On test function methods for nonlinear wave equations
3. 学会等名 三重偏微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 Semilinear damped wave equation with slowly decaying initial data in exterior domain
3. 学会等名 北海道大学偏微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 Finite time blowup of solutions to semilinear wave equation in an exterior domain
3. 学会等名 The 17th Linear and Nonlinear Waves (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 On test function method for semilinear wave equations with scale-invariant damping
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 「常微分方程式における最近の動向とその発展」 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 あるクラスの非有界な係数をもつ Schrödinger 作用素の自己共役性について
3. 学会等名 静岡複素解析幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 Global existence of solutions to semilinear damped wave equation with slowly decaying initial data in exterior domain
3. 学会等名 Workshop on PDEs in Direct and Inverse Problems 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 Higher order asymptotic expansion for abstract linear hyperbolic equations
3. 学会等名 第21回北東研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 Remark on lifespan estimates for semilinear wave equations and their weakly coupled systems
3. 学会等名 One-day workshop on nonlinear dispersive equations in Osaka (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Motohiro Sobajima
2. 発表標題 On blowup phenomena of semilinear wave equations and their weakly coupled systems
3. 学会等名 第8回 弘前非線形方程式研究会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masahiro Ikeda, Motohiro Sobajima, Kyouhei
2. 発表標題 On blowup solutions of semilinear wave equations and their weakly coupled systems
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会函数方程式論分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kenji Nishihara, Motohiro Sobajima, Yuta Wakasugi
2. 発表標題 Critical exponent for the semilinear wave equations with a damping increasing in the far field
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会函数方程式論分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	若杉 勇太 (Wakasugi Yuta)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	池田 正弘 (Ikeda Masahiro)		
研究協力者	西原 健二 (Nishihara Kenji)		
研究協力者	久保 英夫 (Kubo Hideo)		
研究協力者	池畠 良 (Ikehata Ryo)		
研究協力者	若狭 恭平 (Wakasa Kyouhei)		
研究協力者	宮崎 隼人 (Miyazaki Hayato)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関

イタリア	University of Salento			
------	-----------------------	--	--	--