

令和 6 年 6 月 1 日現在

機関番号：32607

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2023

課題番号：18K13449

研究課題名（和文）禁止グラフ条件間の差の特徴付けと、その手法の確立

研究課題名（英文）Characterizations of difference between forbidden subgraph conditions and the establishment of their methods

研究代表者

古谷 倫貴（Furuya, Michitaka）

北里大学・一般教育部・准教授

研究者番号：40711792

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、禁止グラフ条件が与える本質的な影響を見極めることを目的として、禁止グラフ条件同士の比較や、各種不変量との関係性について研究を行った。その結果として、不変量を対象とするラムゼー型問題を確立した。この問題は古典的なGyarfas-Sumner予想に強く関係しており、その類似問題の解決は同予想に新たな研究方針を与える。また、禁止グラフ条件の特性を見直すことで禁止グラフ条件を用いた複数の既存定理の統合にも成功している。更に、そのような研究から着想を得たことで支配数的不変量の統一化に至り、それを応用した既存研究の細密化を行うことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

禁止グラフ条件は、グラフの構造や不変量を研究する際に頻繁に用いられる重要な十分条件である。しかしそれらの条件自体がグラフに与える本質的な影響や、複数の禁止グラフ条件間の性質比較という基礎研究はほとんど注目されていなかった。本研究ではそれを補う研究を進めたことによって、既存成果の整理や一般化を行うことに成功した。これらの結果により、禁止グラフ条件を用いる研究全域の進展に繋がったと言える。

研究成果の概要（英文）：In this research, our main aim is to make sure of essential effects given by forbidden subgraph conditions. To do so, we studied comparisons between forbidden subgraph conditions and relationship between forbidden subgraphs and various graph-invariants. As a result, Ramsey-type problems for graph-invariants were established. The problem is strongly related to the classical Gyarfas-Sumner conjecture, and the solution of its analogues from the point of view of Ramsey-type problem provides a new research direction for the conjecture. By reviewing the properties of forbidden subgraph conditions, we also gave a common generalization of known results concerning the existence of Hamiltonian cycle. Furthermore, inspired by such studies, we unify well-known domination-like invariants. Applying them, some results on domination number were analyzed in detail.

研究分野：グラフ理論

キーワード：グラフ理論 禁止部分グラフ ラムゼー型問題 支配数 道被覆数 次数因子

### 1. 研究開始当初の背景

「2-連結 $\{K_{1,3}, N\}$ -フリーグラフはハミルトン閉路を持つ」(Duffus et al. (1981))という命題に代表されるように、特定の誘導部分グラフを禁止する条件(禁止グラフ条件)によって特定のグラフ構造や不変量の制限を行うという研究が、古くから盛んに行われてきた。上記の命題は「 $\{K_{1,3}, B\}$ -フリー」という条件に置き換えても成り立つ(Bedrossian (1991))など、一般に特定の対象を保証する禁止グラフ条件は一位に定まらないが、それらの命題の証明は似たような議論になりがちである。この問題点に対し本研究代表者は、 $\{K_{1,3}, B\}$ -フリーだが $\{K_{1,3}, N\}$ -フリーでないグラフの明示的な特徴付けに成功し、その結果として Duffus らの定理から、Bedrossian の定理が系として導かれることを示した。この事実を鑑みると、禁止グラフ条件同士の比較、ならびに条件が与える本質的な構造を把握することで、禁止グラフ条件に関する各種研究がより系統立ったものになると考えられる。このような背景の下で「一般的な禁止グラフ条件の差や性質の特徴付けはどのように行えるか？」という問いにたどり着いた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、上記で提示した問いに答えることで、禁止グラフ条件に対する基礎研究を確立することにある。より具体的には、グラフ理論全域で研究されている数多くの禁止グラフ条件の整理と比較、証明の本質的な重複の防止である。特に研究代表者がこれまでに実施してきた禁止グラフ条件の差の把握、ならびに禁止グラフ条件を満たすグラフ族が有限になる場合の特定を土台とし、より多くの禁止グラフ条件に知見を与えるような命題を発見する。

### 3. 研究の方法

(1) 研究の目的を達成する上で、禁止グラフ条件の差の決定は一つの有用なアプローチ方法である。特に、上記の例に現れる  $K_{1,3}$  というグラフを禁止することによりグラフの“良い”構造が発見しやすい点に着目し、それを含む禁止グラフ条件を中心に議論を進める。その一方で、既約木の存在性には  $K_{1,3}$  に準ずるグラフは禁止する必要がなく、道グラフが鍵となることが知られていた。そこで  $K_{1,3}$  にこだわらない一般論についても並行して研究を進める。

(2) 禁止グラフ条件が与える影響を可視化する手段の一つとして、数値的に捉えることが挙げられる。そこでどのような禁止グラフ条件を付与すると不変量が制限されるかという問題を提案した。研究開始当初はこの不変量として位数と支配数という二つを想定しており、それらを中心に研究を実施する予定であった。その研究自体には成功したが、より一般的な不変量を扱うことの有用性に気付いたため、その研究範囲を広げることとした。

(3) 既存研究において主流であった禁止グラフ条件を用いたグラフ構造の把握という研究は継続して行う。このような研究は命題や証明手法のサンプルを増やし、その結果として本研究の本筋に対する指針を与えることに繋がる。

### 4. 研究成果

本研究では上記の方法に従い研究を進めた。また、その過程で生じた問題を解決するために不変量研究にも着手することとなった。その結果、本研究を通じて 19 編の査読付論文を出版するに至った。以下ではその重要な成果を述べる。

(1)  $K_{1,3}$  を含む禁止グラフ条件として、 $\{K_{1,3}, Z_2\}$ -フリーであるが  $B_{1,2}$ -フリーでないものの特徴付けなど、ハミルトン閉路・pancyclic 性・Halin 部分グラフに関連する禁止グラフ条件同士の比較を行った。これらによって Halin 部分グラフの存在性に関する予想の部分的解決や、例外を考慮した pancyclic 性を保証する命題を与えることができた。この成果は Guantao Chen 氏・Ping Yang 氏(いずれも Georgia State Univ.), Songling Shan 氏 (Illinois State Univ.) 土屋翔一氏(専修大学)との国際共同研究であり、“Characterizing the difference between graph classes defined by forbidden pairs including the claw” という論文としてまとめ、学術雑誌 Graphs and Combinatorics に掲載された。

(2) 本研究を実施するきっかけとなったハミルトン閉路を保証するための禁止グラフ条件は本質的に 4 つに限られることが知られている。本研究ではそれらすべての条件より弱い自明な禁止グラフ条件に着目し、例外グラフを特徴付けることで、既存の 4 つの命題をすべて包含する統一的な定理を与えることに成功した。更に同定理によって、2-因子の存在性を保証する命題の証明にあった不備を補うこともできた。この結果は千葉周也氏(熊本大学)との共同研究であり、“A characterization of 2-connected  $\{K_{1,3}, N_3, 1, 1\}$ -free non-Hamiltonian graphs” という論文としてまとめ、学術雑誌 Discrete Mathematics に掲載された。

(3) ハミルトン閉路の存在性を動機として、高連結度グラフに制限して禁止グラフ条件を考えた際にそれを満たすグラフが有限個に限られる場合の特定が進んでいる。本研究ではグラフ彩色を由来として、上記問題を連結度の代わりに最小次数を用いて考察し、最小次数3以上という条件下では大半の場合が特定されることを示した。これによりある禁止グラフ条件を満たすグラフの彩色数が多項式時間で決定される。この結果は江川嘉美氏(東京理科大学)との共同研究であり、“Forbidden triples generating a finite set of graphs with minimum degree three”という論文としてまとめ、学術雑誌 Discrete Applied Mathematics に掲載された。

(4) 支配数が定数で抑えられるための禁止グラフ条件の特定を論文“Forbidden subgraphs for constant domination number”(Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 掲載)にまとめ、その後、独立数やマッチング数などに対する類似問題を国際共同研究として Ilkyoo Choi 氏(Hankuk Univ. of Foreign Studies), Ringi Kim 氏(KAIST), Boram Park 氏(Ajou Univ.)と実施し、“A Ramsey-type theorem for the matching number regarding connected graphs”という論文にまとめた(Discrete Mathematics 掲載)。更に、道被覆数・道分割数に対する同問題を、グラフおよび有向グラフに対して考察し、完全解決を行った(“Ramsey-type results for path covers and path partitions”(The Electronic Journal of Combinatorics 掲載),および“Ramsey-type results for path covers and path partitions. II. Digraphs”(Applied Mathematics and Computing 掲載): いずれも千葉周也氏との共同研究)。これら一連の研究によって不変量に特化したラムゼー型問題が確立された。この問題を彩色数で考えると古典的な Gyrfas-Sumner 予想と同値命題となることから、その重要性が窺える。不変量の比較という観点から、我々の成果のいくつかは Gyrfas-Sumner 予想の類似と見なせるが、それらは解決できたという事実から、同予想に対する新しい現実的な研究方針を提示したと言える。

(5) (2) のように複数の命題の包含を目指した研究の過程で、支配数的不変量自体の一般化に至った。特に全支配数とローマ支配数という主要な不変量に新たな定義を与えたことで支配数と共にパラメータを用いた共通の表現を発見した(“A continuous generalization of domination-like invariants”(Journal of Combinatorial Optimization 掲載))。この表現を用いることで“A characterization of trees based on edge-deletion and its applications for domination-type invariants”(Discrete Applied Mathematics 掲載)や“Small domination-type invariants in random graphs”(Journal of Combinatorics 掲載: 川崎玉恵氏(青山学院大学)との共同研究)など、不変量分析が大きく進展している。

(6) 偶位数の  $K_{\{1,3\}}$ -フリーグラフが完全マッチングを持つという事実から派生して、 $K_{\{1,3\}}$ -フリー性を中心とした禁止グラフ条件によるグラフの因子問題が研究されてきた。研究代表者は加納幹雄氏(茨城大学)と共に two-tone factor という次数因子を提案し、その研究の中で以下の2つの命題を証明した。「連結  $K_{\{1,3\}}$ -フリーグラフの頂点に赤か青の色を与える。ただし、赤の頂点は偶数個とする。このとき、赤の頂点の次数は1、青の頂点の次数は0か2となるような全域部分グラフが存在する。」 $3$ -辺連結  $K_{\{1,3\}}$ -フリーグラフの頂点に赤か青の色を与える。ただし、赤の頂点は偶数個で、どの二つも距離が3以上離れているものとする。このとき、赤の頂点の次数は1、青の頂点の次数は2となるような全域部分グラフが存在する。」このように頂点分割のそれぞれに異なる次数制約を課した次数因子という新しい問題について、禁止グラフ条件が有効に働くことが判明した。この結果は論文“Factors with red-blue coloring of claw-free graphs and cubic graphs”にまとめ、学術雑誌 Graphs and Combinatorics に掲載された。またその後、正則グラフに特化して two-tone factor の研究を進めることで、部集合毎に正則性を持つ二部グラフ、および一般の正則グラフにおける命題を証明し、それぞれ“Factors of bi-regular bipartite graphs”(Discrete Applied Mathematics 掲載: 江川嘉美氏, 加納幹雄氏との共同研究), “Degree factors with red-blue coloring of regular graphs”(The Electronic Journal of Combinatorics 掲載: 加納幹雄氏との共同研究)にまとめた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計19件（うち査読付論文 18件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Furuya Michitaka, Kano Mikio	4. 巻 39
2. 論文標題 Factors with Red?Blue Coloring of Claw-Free Graphs and Cubic Graphs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 #85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-023-02680-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Chiba Shuya, Furuya Michitaka	4. 巻 458
2. 論文標題 Ramsey-type results for path covers and path partitions. II. digraphs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Applied Mathematics and Computation	6. 最初と最後の頁 128205 ~ 128205
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.amc.2023.128205	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Furuya Michitaka, Maezawa Shun-ichi, Matsubara Ryota, Matsuda Haruhide, Tsuchiya Shoichi, Yashima Takamasa	4. 巻 42
2. 論文標題 Degree sum condition for the existence of spanning k-trees in star-free graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discussiones Mathematicae Graph Theory	6. 最初と最後の頁 5 ~ 13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7151/dmgt.2234	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Furuya Michitaka, Kawasaki Tamae	4. 巻 13
2. 論文標題 Small domination-type invariants in random graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 531 ~ 543
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/JOC.2022.v13.n4.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Egawa Yoshimi, Furuya Michitaka	4. 巻 320
2. 論文標題 Forbidden triples generating a finite set of graphs with minimum degree three	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 282 ~ 295
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2022.05.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiba Shuya, Furuya Michitaka	4. 巻 29
2. 論文標題 Ramsey-Type Results for Path Covers and Path Partitions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 P4.8
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.37236/10639	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Egawa Yoshimi, Furuya Michitaka, Kano Mikio	4. 巻 322
2. 論文標題 Factors of bi-regular bipartite graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 268 ~ 272
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2022.08.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiba Shuya, Furuya Michitaka	4. 巻 344
2. 論文標題 A characterization of 2-connected $\{K_1,3,K_3,1,1\}$ -free non-Hamiltonian graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 112321 ~ 112321
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2021.112321	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Furuya Michitaka	4. 巻 41
2. 論文標題 A continuous generalization of domination-like invariants	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Optimization	6. 最初と最後の頁 905 ~ 922
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10878-021-00725-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Furuya Michitaka	4. 巻 299
2. 論文標題 A characterization of trees based on edge-deletion and its applications for domination-type invariants	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 50 ~ 61
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2021.04.020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Egawa Yoshimi, Furuya Michitaka, Matsumura Hajime	4. 巻 344
2. 論文標題 Existence of a spanning tree having small diameter	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 112548 ~ 112548
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2021.112548	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Furuya Michitaka, Maezawa Shun-ichi, Ozeki Kenta	4. 巻 36
2. 論文標題 Long Paths in Bipartite Graphs and Path-Bistar Bipartite Ramsey Numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 167 ~ 176
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-019-02127-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Furuya Michitaka, Tsuchiya Shoichi	4. 巻 93
2. 論文標題 Large homeomorphically irreducible trees in path free graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Graph Theory	6. 最初と最後の頁 372 ~ 394
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22492	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chiba Shuya, Furuya Michitaka, Ozeki Kenta, Tsugaki Masao, Yamashita Tomoki	4. 巻 26
2. 論文標題 A Degree Sum Condition on the Order, the Connectivity and the Independence Number for Hamiltonicity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 P4.53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.37236/5480	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Choi Ilkyoo, Furuya Michitaka, Kim Ringi, Park Boram	4. 巻 343
2. 論文標題 A Ramsey-type theorem for the matching number regarding connected graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 111648 ~ 111648
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.111648	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chen Guantao, Furuya Michitaka, Shan Songling, Tsuchiya Shoichi, Yang Ping	4. 巻 35
2. 論文標題 Characterizing the Difference Between Graph Classes Defined by Forbidden Pairs Including the Claw	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1459 ~ 1474
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-019-02108-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Michitaka Furuya	4. 巻 20
2. 論文標題 Forbidden subgraphs for constant domination number	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 #19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Michitaka Furuya, Naoki Matsumoto	4. 巻 142
2. 論文標題 A note on domination 3-edge-critical planar graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Information Processing Letters	6. 最初と最後の頁 64-67
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ipl.2018.10.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinya Fujita, Michitaka Furuya, Colton Magnant	4. 巻 258
2. 論文標題 General upper bounds on independent k-rainbow domination	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 105-113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2018.11.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 古谷 倫貴、土屋 翔一
2. 発表標題 HIST的全域木の構成と禁止グラフ
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2023・離散数学とその応用研究集会2023
4. 発表年 2023年



1. 発表者名 古谷倫貴、千葉周也
2. 発表標題 Ramsey型問題からのGyarfas-Sumner予想へのアプローチ
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2022・離散数学とその応用研究集会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 古谷倫貴
2. 発表標題 次数積条件とグラフの連結性
3. 学会等名 2022年度RIMS共同研究「グラフの辺着色グラフへの拡張性および非拡張性」
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 古谷倫貴、千葉周也
2. 発表標題 cover/partition numberに見る不変量版ラムゼー問題
3. 学会等名 2021年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 古谷倫貴
2. 発表標題 グラフクラスの有限性と禁止部分グラフ条件
3. 学会等名 日本応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 古谷倫貴, 川崎玉恵
2. 発表標題 Self domination in random graphs
3. 学会等名 2019年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 古谷倫貴
2. 発表標題 禁止部分グラフによる十分条件の決定の難易
3. 学会等名 2020組合せ論とその周辺研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 古谷倫貴
2. 発表標題 Bounds on self domination number and an edge-deletion operation in trees
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 深作亮也, 古谷倫貴, 東谷章弘
2. 発表標題 グラフのテンソル積の染色数とグレブナー基底
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 古谷倫貴
2. 発表標題 局所構造条件を満たすグラフの集合の 比較と特徴付け
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Michitaka Furuya
2. 発表標題 A continuous generalization of domination-type invariants
3. 学会等名 The Fourth Japan-Sino Symposium on Graph Theory, Combinatorics and Their Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Michitaka Furuya
2. 発表標題 Difference between forbidden subgraph conditions
3. 学会等名 2018 SCMS Workshop on Extremal and Structural Graph Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Michitaka Furuya's homepage  <a href="https://sites.google.com/site/michitakafuruya/">https://sites.google.com/site/michitakafuruya/</a></p>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------