

令和 4 年 6 月 30 日現在

機関番号：52604

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2021

課題番号：18K13452

研究課題名(和文) 葉序のパターン形成を理解するための数理モデリングとその幾何学的研究

研究課題名(英文) Mathematical modeling for understanding phyllotactic patterns and its geometrical study

研究代表者

須志田 隆道 (Sushida, Takamichi)

サレジオ工業高等専門学校・その他部局等・講師

研究者番号：00751158

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：ひまわりなどの螺旋葉序の幾何学モデルとして放物螺旋格子のポロノイタイリングが提案されているがその数理構造は数学的に明らかでない。本研究では、放物螺旋格子を含む一般化アルキメデス螺旋格子のポロノイタイリングについて、螺旋構造の分岐を示す結晶粒界が七角形、六角形、五角形から構成されることと多角形の個数が回転角に対する連分数展開の近似分数の分母であることやパラメータの分岐曲線の稠密性、ポロノイタイルの面積収束などの数理構造を網羅的に明らかにした。さらに、ポロノイタイリングの幾何学的研究の波及として、ショウジョウバエの複眼パターンがポロノイタイリングに従うことを実験データの統計解析から明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

20世紀後半に提案された放物螺旋格子を含む一般アルキメデス螺旋格子のポロノイタイリングの数理構造を明らかにした。さらに、ポロノイタイルの面積に対する収束および発散の条件を明らかにし、放物螺旋格子の場合に限り、面積が円周率に収束することを示した。対数螺旋格子や放物螺旋格子などではエネルギー的に最適な配置は黄金比で記述されることが知られているが、複素力学系分野で研究されている複雑な数理構造を有する超冪乗点列においても黄金比が関連することを数値的に示し、新たな展開を与えた。さらに、ショウジョウバエの複眼に対する幾何学的研究では、ポロノイ分割が細胞組織の形態形成で見られる例を新たに示すことができた。

研究成果の概要(英文)：Voronoi tilings with parabolic spiral lattices has been proposed as a geometric model of spiral phyllotaxis which are observed to plants such as sunflowers. However, its mathematical structure was not mathematically clear. In this study, about Voronoi tilings with generalized Archimedean spiral lattices including the parabolic spiral lattices, we showed comprehensively mathematical structures as follows. Grain boundaries consist of heptgons, hexagons, and pentagons, and the number of polygons is determined by denominators of convergents obtained from the regular continued fraction expansion of the divergence angle; the denseness of bifurcation curves of parameters; and the area convergence of Voronoi tiles. Moreover, as a ripple effect of the geometric study of Voronoi tiling for phyllotactic patterns, it was clarified from the statistical analysis of experimental data that patterns of compound eyes of *Drosophila* follow Voronoi tessellations.

研究分野：数理生物学

キーワード：葉序 ポロノイ図 連分数展開 複素力学系 タイリング

## 1. 研究開始当初の背景

ひまわりなどの螺旋葉序に対する幾何学モデルは、20世紀初頭に van Iterson (1907) によって提案された対数螺旋上の格子点列や20世紀後半に Richards (1948) や Vogel (1979) らによって個別に提案された放物螺旋上の格子点列などのさまざまな螺旋格子がある。格子点列における螺旋を定義するために、円板充填モデルやポロノイタイリングモデルが提案されてきた。研究代表者は山岸義和氏(龍谷大学)と日詰明男氏(龍谷大学)との共同研究として、対数螺旋格子の円板充填やポロノイタイリングにおける螺旋の本数の分岐構造や面積の形状について数学的な証明を与える研究を展開してきた。しかし、放物螺旋格子のポロノイタイリングについては、螺旋の本数の分岐構造や面積の収束に関して、数値的な示唆が与えられていることに留まっており、その数学的な証明は与えられていないという状況である。また、螺旋葉序の形態形成を理解するための数理モデルの研究では、巨視的な螺旋パターンの形成を記述する反応拡散系モデルや細胞組織が作り出すパターン形成を記述する微視的なバーテックスモデルが提案されており、いずれの数理モデルにおいても回転角が黄金角に近づくことが数値的に示されている。

## 2. 研究の目的

本研究では、放物螺旋格子を一般化したアルキメデス螺旋格子のポロノイタイリングにおいて、螺旋の分岐を表す結晶粒界 (Grain boundary) が七角形、六角形、五角形で構成されることを示すことと多角形の個数が回転角の連分数展開の近似分数の分母で記述されることを示すことを目的とする。さらに、一般化したアルキメデス螺旋格子のポロノイタイリングのポロノイタイルの面積の収束および発散の条件を明らかにすることを目的とする。

対数螺旋格子や放物螺旋格子などの螺旋葉序を表現する格子点列に対する最適点配置問題に関しては、エネルギー的に最適な配置が黄金比で記述されるパターンであることを示すことを目的とする。

## 3. 研究の方法

一般化アルキメデス螺旋格子のポロノイタイリングではポロノイタイルで構成される螺旋構造の分岐を明らかにするために、通常アルキメデス螺旋格子の場合の先行研究 Yamagishi and Sushida (2018) と同様にして、連続パラメータを導入することで、大域的な構造の解析を可能にする。ポロノイタイルの面積の収束に関しては線形格子のポロノイタイルの面積を利用した証明を考える。エネルギー関数による最適点配置問題に関しては、Levitov (1991) による先行研究と同様の関数を採用した場合を考える。

## 4. 研究成果

(1) 連続パラメータを導入した一般化アルキメデス螺旋格子のポロノイタイリングにおいても、通常アルキメデス螺旋格子の場合と同様に、連続パラメータを変化させて、1つのポロノイタイルの局所的な変化を捉えれば、もともとの一般化アルキメデス螺旋格子のポロノイタイリングの大域的な分岐構造を捉えることができる。螺旋の構造が分岐する際には、4つの母点が同一円周上にのるため、Delaunay 四角形が得られる。4つの母点が同一円周上にのることから分岐するパラメータを決定するための非線形方程式が導出される。一般化したことによって、非常に複雑な方程式となるが、本質的な部分を抽出することで、中間値の定理を用いて解の一意性を証明することに成功した。次いで、方程式で決定されるパラメータの値から局所的な隣接関係の分岐構造を整理することで、螺旋の構造が変化する際に出現する円環上の Grain boundary が七角形、六角形、五角形から構成されることを示した。また、1つのポロノイタイルに隣接する他のポロノイタイルの母点の番号である斜列係数が回転角の連分数展開の近似分数の分母であることから、七角形、六角形、五角形の個数が近似分数の分母によって記述されることを示した。さらに、Grain boundary を構成する多角形の極限形状が長方形になることを示し、その縦横比が回転角の連分数展開で記述できることを示し、回転角が黄金比と対等な無理数であるときに縦横比が1に収束することを示した。斜列係数毎に定まるパラメータ曲線に関しては、一般化アルキメデス螺旋格子の螺旋の間隔を制御するパラメータ  $a$  と斜列係数の対  $(m, n)$  に応じて決定される曲線を全て分類した。さらに、パラメータ曲線を単位円板内で考えた場合について、全ての曲線の和集合が単位円板の稠密部分集合であることを示した。以上の研究成果については現在投稿準備中である。ポロノイタイルの面積収束に関しては、螺旋間隔のパラメータ  $a$  について、 $a$  が  $1/2$  より大きい場合はポロノイタイルの面積が発散し、 $a$  が  $1/2$  より小さいときは0に収束し、ちょうど  $a$  が  $1/2$  のとき、すなわち放物螺旋格子の場合に円周率に収束することを示した。

(2) エネルギー関数を用いた最適点配置問題に関しては、対数螺旋格子を対象とした場合に、パ

ラメータの値が十分小さい場合について、エネルギー関数の近似式を導出し、エネルギーの値が最小になる方向を示した。また、最適点配置問題の発展として、複素力学系分野で研究されている超冪乗（テトラーション）による複素点列についても同様のエネルギー関数を導入した場合のパラメータの分岐を考えた。超冪乗点列は対数螺旋格子のように不動点が1点である場合だけでなく、周期点をもつような場合や発散してしまう場合がある。周期点の個数毎に複素数の集合を分類する研究が行われてきた。ここでは、不動点が1つの場合に限るものとする。不動点が1つである複素数は単位円板内の複素数と対応することが知られている。対数螺旋格子の場合と同様に、パラメータの値が十分小さい場合について、エネルギー関数の近似式を導出し、エネルギーの値が最小になる方向が対数螺旋点列の場合の真逆になることを示した。さらに、数値計算を行うことによって、パラメータを大きくしたときに収束する回転角の値を算出した。対数螺旋点列ないし超冪乗点列の場合のいずれについても、パラメータを大きくしたときの収束先を数学的に決定できていないため、今後の課題として残されている。

(3) ポロノイタイリングと生物学の関わりとして、ショウジョウバエの複眼に見られる幾何学的パターンとポロノイタイリングの一致度を実験データの統計解析によって示す研究を行った。特に、個眼細胞の成長速度が異なる突然変異型においても、成長速度を重みとして導入した乗法重み付きポロノイタイリングと高い一致度を示すことを明らかにした。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yamagishi Yoshikazu, Sushida Takamichi, Sadoc Jean-Francois	4. 巻 34
2. 論文標題 Area convergence of Voronoi cells on spiral lattices	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 3163 ~ 3183
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/abe733	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Takashi, Tomomizu Takeshi, Sushida Takamichi, Akiyama Masakazu, Ei Shin-Ichiro, Sato Makoto	4. 巻 32
2. 論文標題 Tiling mechanisms of the Drosophila compound eye through geometrical tessellation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Current Biology	6. 最初と最後の頁 2101 ~ 2109.e5
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cub.2022.03.046	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 山岸義和, 須志田隆道, Jean-Francois Sadoc
2. 発表標題 アルキメデス螺旋格子のポロノイ領域の面積の収束
3. 学会等名 日本応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 牧田渉, 山岸義和, 須志田隆道
2. 発表標題 Parastichy and semi-parastichy numbers in sticky circle packing
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 牧田 渉, 山岸 義和, 須志田 隆道
2. 発表標題 粘着円充填の斜列構造の分岐
3. 学会等名 日本応用数理学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 須志田 隆道, 山岸 義和
2. 発表標題 一般アルキメデス螺旋格子によるポロノイタイリング
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 須志田 隆道, 山岸 義和
2. 発表標題 一般アルキメデス螺旋格子による葉序的なポロノイタイリング
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 須志田 隆道
2. 発表標題 一般アルキメデス螺旋格子による葉序的なポロノイタイリング
3. 学会等名 2018年 若井沢グラフと解析研究集会II
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takamichi Sushida, Yoshikazu Yamagishi
2. 発表標題 Phyllotactic Voronoi tilings on the generalized Archimedean spiral lattices
3. 学会等名 RIMS cooperative research, Tilings, quasiperiodicity and related topics
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 牧田 渉, 岸田健太, 須志田隆道, 山岸義和
2. 発表標題 粘着円充填
3. 学会等名 日本応用数理学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 須志田 隆道, 山岸義和
2. 発表標題 一般アルキメデス螺旋格子による葉序的なボロノイタイリング
3. 学会等名 日本応用数理学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 須志田 隆道
2. 発表標題 一般アルキメデス螺旋格子による葉序的なボロノイタイリング
3. 学会等名 第12回応用数理研究会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------