様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　5 年　5 月 24 日現在

機関番号：１４３０２
研究種目：若手研究
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ１３４５７
研究課題名（和文）記号列空間図によるセル・オートマトンの解析

研究課題名（英文）Analysis of cellular automata by symbolic sequence space diagram

研究代表者
川原田　茜（Kawaharada, Akane）

京都教育大学・教育学部・講師

研究者番号：７０７１０９５３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：セル・オートマトン（CA）で生成したフラクタルを一変数関数によって特徴付けることにより分類した。
線型対称2状態半径1のCAの初期値Single Site Seedからの時間発展パターンを一変数関数によって表し、パターンが自己相似性を持つ場合に、これらが特異関数となっていることを示した。また、得られる一変数関数が特異関数となるための十分条件も与えた。さらに、得られる一変数関数がSalemの特異関数となるCAを具体的に構成して与え、CAの次元に応じてSalemの特異関数のパラメータが変化することを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究により、一変数関数によってCAで生成したフラクタルを分類することが一部可能となった。実数値でパターンを特徴付けるフラクタル次元よりも多くの情報を保持している関数で特徴付けることにより、フラクタル解析の新たな手段となることが今後期待される。
また、本研究により病的関数の分類が進む可能性がある。CAが生成したフラクタルから得られる関数は、特異関数などの病的関数となることが分かってきたため、多様なフラクタルに対して関数を考えることにより、様々な病的関数の特徴付けが進むことが期待される。

研究成果の概要（英文）：Fractals generated by cellular automata (CAs) were classified by characterizing them with one-variable functions.
Spatio-temporal patterns from the single site seed of linear symmetric two-state radius-1 CAs are represented by one-variable functions, and it is shown that they are singular functions if the patterns are self-similar. We also gave sufficient conditions for the obtained one-variable functions to be singular functions. Furthermore, we gave transition rules of CAs for which the obtained one-variable functions are Salem's singular functions, and proved that the parameter of Salem's singular function varies with the dimension of the CA.

研究分野：応用数学、力学系

キーワード：セル・オートマトン　フラクタル　部分自己相似集合　特異関数

１．研究開始当初の背景

セル・オートマトン（Cellular Automaton, 以下 CA と書く）は 1950 年代にフォン・ノイマンらに考案されてから、様々な現象の数理モデルとして用いられてきている。CA は局所的な相互作用によって大域的な挙動が決定される力学系であり、規則が単純であるにも関わらず生成される挙動は複雑で多様である。さらにすべての変数が離散値をとるため、計算機シミュレーションとの相性が良い点も数理モデルとして採用する上で大きなメリットとなっている。

一方で CA は格子上における拡張された記号力学系と見做すことができるため、既存の力学系理論に基づいた研究も進められてきた。しかし記号力学系の拡張としての CA の解析によって得られる結果は、一部の限定的な CA に対する結果に留まっていたり、分類に関しては粗くなり過ぎてしまったりすることも多く、CA の魅力である多様な挙動を表現できるような適当な尺度を用意することが難しかった。

例えば力学系の`複雑さ’の指標として知られる位相的エントロピーは、CA の規則が線型の場合には値を求めることが可能であるが、非線型の場合にはごく限られた CA に対してしか値を求めることができない。また、力学系の軌道の`複雑さ’の指標として知られるリアプノフ指数についても、CA の軌道が拡大的であるときには 1 より大きくなることが知られているが、それ以外のケースについては一般に厳密に値を求めることは難しいことが知られている。

２．研究の目的

既存の位相力学系に基づく記号力学系理論では難しかった CA の解析を、記号列空間図を用いた新たな手法によって行うことを当初の目的としていた。記号列空間図は、CA の挙動を R^2 上の挙動へ変換して表したものであり、定義の仕方より、図のスケールがそのまま数値計算の精度に対応している。記号列空間図を用いることにより、予め設定した精度における CA の挙動を追跡することが可能となり、挙動の対称性、軌道の稠密性などの CA の特性を可視化することができる。

３．研究の方法

本研究ではまず特徴的なパターンを多数生成することが知られている初期値 Single Site Seed（以下 SSS と書く）から描かれる軌道、ランダムな初期値から得られる軌道に着目した CA の分類を記号列空間図を用いて与える。

この分類を与える過程で、初期値 SSS からの軌道に関する詳細な解析が必要となったため、プレフラクタル集合に対して、非ゼロ状態のセル個数の時間発展に関する解析を行う。この解析の過程で、セル個数の漸近挙動がフラクタルを特徴付けており、具体的な一変数関数として書き下せることが分かってきたため、一変数関数によるフラクタルの特徴付けと分類を進める。当初、線型一次元基本 CA（以下 ECA を書く）のみについて行なっていた解析も、一般化することにより、任意の次元の対称 ECA にまで拡張して議論することが可能となっている。

４．研究成果

まず、256 個の一次元 ECA に対して、記号列空間図を元にリターンマップを作成し、これを用いて ECA の挙動の特性を調べた。初期値が SSS のときと、初期値がランダムのときのリターンマップを描き、マップの対称性から ECA の分類を行った。さらにリターンマップと時間発展パターンとの対応について調べ、これらの対称性に対応があることを明らかにした。また、リターンマップからは時間発展パターンを描くよりも効果的に ECA の挙動特性を知ることができるため、各 ECA のアトラクターやエデンの園配置についても調べた。

記号列空間図による解析を進める過程で、軌道に関してより詳しく調べることが必要となってきた。そこで一次元 ECA の初期値 SSS からの軌道におけるプレフラクタル集合について、非ゼロ状態をとるセル個数に関する詳細な解析を進めた。一次元 ECA でフラクタルを生成するものがいくつか知られているが、中でも生成規則が線型である Rule 90 と Rule 150 について、それぞれプレフラクタル集合におけるセル個数の時間発展を調べた。線型 CA に対しては、完全

自己相似集合もしくは部分自己相似集合を考えることによって、2^n 時間ステップ毎にプレフラクタル集合を構成するセルの累積個数を表すことができる例が知られている。これらの先行研究の結果を踏まえ、プレフラクタル集合の累積セル個数と各時間ステップにおけるセル個数を導出した。またこれら結果は二次元 ECA に対しても応用することができたため、生成規則が対称性を持つ二次元 ECA について、部分自己相似集合を考えることによってプレフラクタル集合の累積セル個数と各時間ステップにおけるセル個数を求めた。

ここまでの研究を通して、CA の初期値 SSS からの軌道は、非ゼロ状態を取るセル個数の時間発展によって特徴付けられることが分かってきた。さらに時間方向に極限をとって漸近挙動を見てみると、これらが特異関数となっている例が複数存在することが分かってきた。より具体的に調べてみると、一次元 ECA の Rule 90、二次元に拡張された Rule 90、および二次元の結晶成長モデルである Ulam モデルの 3 つの場合について、セル個数の漸近挙動は Salem の特異関数（パラメータが 1/3, 1/4, 1/5 の場合）で表されることを示すことができた。また、これらの CA について、有限時間ステップで止めたプレフラクタル集合においても Salem の特異関数で表されることを関数方程式から示した。さらに一次元 ECA の Rule 150 について、Rule 150 は線型 CA であり初期値 SSS からの軌道の極限はフラクタルになるが、この軌道から自然に導出される単位区間上の関数も特異関数となることが分かった。この関数の微分可能性について、dyadic rational points において微分不可能となることを示した。また、この関数が満たすような関数方程式を導出し、この関数が関数方程式の唯一の解であることを示した。

次に、対称な時間発展パターンを生成するような一次元線型 ECA および二次元線型 ECA に対して、一般化した結果を得た。これらの CA の初期値 SSS からの時間発展パターンに対して、非ゼロ状態のセル個数を正規化して極限をとり、極限集合に対して一変数関数を与える。このときこれらの関数は特異関数となっていることを示した。逆に、得られる一変数関数が特異関数となるための十分条件を与えることにも成功した。さらに、本結果は先の一次元 ECA の Rule 90 と二次元 ECA に関する結果も含んでおり、得られた関数は Salem の特異関数であることも示すことができた。また、非線形一次元 ECA の Rule 22 と Rule 126 についても議論し、Rule 90 とは時間発展パターンは異なるが、これらの時間発展パターンから得られる関数は Rule 90 の関数と一致することを示すことができた。非線型 CA についても、線型 CA の結果に帰着させることにより、部分的な結果を得ることができた。

さらに次元を一般化し、任意の次元の CA の時間発展パターンから得られる関数に対しても議論を進めた。これまでの研究で、CA の時空間パターンの極限集合がフラクタルである場合、そのパターンを時間軸に射影するとパラメータが 1/3, 1/4, 1/5 のときの Salem の特異関数が得られることが分かっていた。しかし、その他のパラメータの Salem の特異関数を与える CA が存在するか否かは不明であったため、各次元 D に対してパラメータが 1/(2D+1) と 1/(2^D+1) の Salem の特異関数をそれぞれ与える CA が存在することを、具体的に CA を構成することによって示した。この結果は、パラメータが 3 以上の奇数の逆数となる Salem 関数を与える CA が存在することを意味する。また、2 次元平面上の格子として、正方格子の他に三角格子、六角格子が考えられるため、これらの格子上の CA から得られる関数についても議論し、Salem の特異関数を与える例が存在することを示した。また数値計算結果として、次元が 5 以下の場合、上記 2 種類以外の D 次元線型対称 2 状態半径 1 の CA が与える関数は、パラメータが 3 以上の整数の逆数となる Salem 関数とはならないことを示した。

ここまでに述べた結果のうち、出版された論文に含まれていない結果は下記のプレプリント 2 編（arXiv）にまとめられている。

[1] Akane Kawaharada, ``Discontinuous Riemann-integrable functions emerging from cellular automata", arXiv, https://arxiv.org/abs/2103.02256, 2021.

[2] Akane Kawaharada, ``D-dimensional cellular automata provide Salem's singular function $L_α$ with $α=1/(2D+1)$ and $1/(2^D+1)$", arXiv, https://arxiv.org/abs/2207.13557, 2022.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Kawaharada Akane	4．巻 439
2．論文標題 Cellular automata that generate symmetrical patterns give singular functions	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Physica D: Nonlinear Phenomena	6．最初と最後の頁 1～12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.physd.2022.133428	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawaharada Akane	4．巻 27
2．論文標題 Singular function emerging from one-dimensional elementary cellular automaton Rule 150	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - B	6．最初と最後の頁 2115～2128
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcdsb.2021125	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawaharada Akane, Namiki Takao	4．巻 61
2．論文標題 Number of nonzero states in prefractal sets generated by cellular automata	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6．最初と最後の頁 1～17
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/5.0004652	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Kawaharada Akane、Namiki Takao	4．巻 9
2．論文標題 Relation between spatio-temporal patterns generated by two-dimensional cellular automata and a singular function	5．発行年 2019年
3．雑誌名 International Journal of Networking and Computing	6．最初と最後の頁 354～369
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.15803/ijnc.9.2_354	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計14件（うち招待講演　0件／うち国際学会　4件）

1．発表者名 川原田 茜
2．発表標題 特異関数によるセル・オートマトンの軌道の特徴付け
3．学会等名 RIMS研究集会「可積分系数理の発展とその応用」
4．発表年 2022年

1．発表者名 川原田 茜
2．発表標題 セル・オートマトンが生成するフラクタルの特徴付けについて
3．学会等名 日本数学会 2022年度 秋季総合分科会（応用数学分科会 特別講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 川原田 茜
2．発表標題 セル・オートマトンによって生成されたフラクタルの一変数関数による特徴付けについて
3．学会等名 第134回HMMCセミナー
4．発表年 2022年

1．発表者名 川原田 茜
2．発表標題 セル・オートマトンの時間発展パターンから生成される関数が特異関数となるための条件について
3．学会等名 2021年度応用数学合同研究集会
4．発表年 2021年

１．発表者名
川原田 茜

２．発表標題
Singular function emerging from Rule 150

３．学会等名
RIMS 研究集会「数理科学の諸問題と力学系理論の新展開」

４．発表年
2020年

１．発表者名
川原田 茜

２．発表標題
一次元セル・オートマトンRule 150から生成される特異関数について

３．学会等名
2020年度応用数学合同研究集会

４．発表年
2020年

１．発表者名
川原田 茜

２．発表標題
一次元セル・オートマトンRule 150から生成される特異関数について

３．学会等名
日本数学会年会2021年度年会

４．発表年
2021年

１．発表者名
Akane Kawaharada

２．発表標題
The numbers of nonzero states in prefractal sets generated by elementary cellular automata

３．学会等名
Australia and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Conference 2020（国際学会）

４．発表年
2020年

１．発表者名
川原田 茜

２．発表標題
プレフラクタル集合を構成するセルの個数について

３．学会等名
2019年度冬の力学系研究集会

４．発表年
2020年

１．発表者名
川原田 茜，行木 孝夫

２．発表標題
プレフラクタル集合の部分自己相似集合への分割によるセル個数の数え上げ

３．学会等名
2019年度応用数学合同研究集会

４．発表年
2019年

１．発表者名
Akane Kawaharada

２．発表標題
Relation between spatio-temporal patterns generated by cellular automata and a singular function

３．学会等名
Australia New Zealand Industrial and Applied Mathematics 2019（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
川原田 茜，行木 孝夫

２．発表標題
ある非線型セル・オートマトンの生成パターンと特異関数との関係について

３．学会等名
日本数学会 2018年度 秋季総合分科会

４．発表年
2018年

1．発表者名 Akane Kawaharada
2．発表標題 Relation between nonlinear cellular automata and singular functions
3．学会等名 Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2018（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Akane Kawaharada and Takao Namiki
2．発表標題 Fractal structure of a nonlinear cellular automaton and the singular function
3．学会等名 13th SIAM East Asian Section Conference 2018（国際学会）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関