

令和 5 年 5 月 27 日現在

機関番号：32641

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2022

課題番号：18K13462

研究課題名(和文) 精度保証付き数値計算法を用いた反応拡散系の大域解の解析

研究課題名(英文) Analysis of a global-in-time solution for reaction-diffusion system using verified numerical computation

研究代表者

水口 信 (Mizuguchi, Makoto)

中央大学・理工学部・助教

研究者番号：90801241

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：この研究では主に反応拡散系を含めた放物型偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算法の改良と時間大域解や爆発解などの特殊な解の存在検証手法の確立を目指す。まず、放物型偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算法の手法改善のために放物型方程式の半離散近似解に対する誤差定数の最良値を求めた。そしてその改善手法を用いた結果、既存の数学的手法では解明できなかったある放物型方程式の爆発解の爆発時間の範囲を明確にすることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般的な非線形偏微分方程式の解を解析的に解くことは難しい。しかし解の精度保証付き数値計算法を用いれば偏微分方程式の解の厳密な存在範囲を明確に示すことができる。そのため方程式の解の存在だけでなく、数値シミュレーション結果の妥当性を保証するといった工学面に対する応用も可能である。この解の精度保証付き数値計算法の改良かつその手法の適応範囲の拡大が本研究の主な目的である。本研究の最も重要な成果はその計算手法を用いてある放物型方程式の解の爆発時間の範囲を得たことである。それは既存の数学的手法では得られなかった現象(爆発現象)の一端が解明できたことを意味する。

研究成果の概要(英文)：In this research, we mainly aim to improve numerical verification method for solutions of parabolic partial differential equations including reaction-diffusion systems, and to establish a method for verifying the existence of special solutions such as global-in-time solutions and blow-up solutions. First, for improving the verification method, we obtained the best value of the error constant of the semi-discrete approximation of the parabolic equation. The improved method were finally able to clarify the range of the explosion time of the blow-up solution, which could not be clarified by previous mathematical methods, of a parabolic equation.

研究分野：偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算

キーワード：計算機援用証明 解の精度保証付き数値計算法 放物型偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

様々な現象を反応拡散系などの非線形偏微分方程式を用いて記述して、その方程式の解を解くことはその現象の解明につながる。このことから様々な分野の研究者達はその解を解くための手法を研究がなされてきた。その研究が発展していくとともに多くの偏微分方程式は解析的に解くことができないことが判明している。そこで計算機を用いた数値計算によって近似的に方程式の解を解くことで、解の挙動を近似的に捉えていく方向性の研究が誕生した。そしてその計算機を用いた研究成果は災害対策などの数値シミュレーションとして様々な分野で応用されている。

しかしながら計算機を用いたその研究によって得られるのはおおまかな解の挙動にすぎず、真の解との挙動の差が明確化されていない。さらに悪いことにその差が無視できないくらい大きくなる場合もあるという報告もなされた。すなわち、その方程式に対応する現象を解明するためには近似解による結果だけでは不十分であり、その誤差の範囲を厳密にとらえる必要がある。そこで注目されているのが、非線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法である。精度保証付き数値計算法とは方程式の真の解の存在を証明したうえで、真の解と近似解の誤差の範囲を厳密に導出する手法である。この手法を用いれば数値シミュレーション結果の信頼性を明示し、解析的に解くのが困難な偏微分方程式の解を解くことができる。長らくこの解の精度保証付き数値計算法は楕円型偏微分方程式への応用がメインであったが、近年の研究では放物型方程式に対する実用的な解の精度保証付き数値計算法が提案されてきた。

2. 研究の目的

解の精度保証付き数値計算法を用いて非線形偏微分方程式の(大域解などの)特殊な解の存在を検証しようというのが本研究の目的である。研究代表者を含め解の精度保証付き数値計算法の研究者によって、時間経過が少ない場合での放物型方程式の解に対して精度保証付き数値計算法による存在検証に成功している。しかし上述した特殊な解は基本的に長時間経過することによって得られる解であるので、現状の精度保証付き数値計算法でその解の検証が成功するのは絶望的である。そこで、まず、既存の解の精度保証付き計算法をより長い時間の解の検証が成功するように改良を加える。そしてその改良版の精度保証付き数値計算法を構築して実装することで特殊な解の存在を検証する。

3. 研究の方法

上記の研究目的を達成するために以下の2つの研究を行った。

(1) 解の検証に必要な定数値の新評価法の提案

偏微分方程式の解析的な研究が進む過程で、解の存在を証明するため様々な定数の存在が示された。その定数によって2つの相異なる関数のクラスに対していくつかの関連性が示される。そしてその関連性から不動点定理などを利用することで数々の非線形偏微分方程式の解が存在するための十分条件が解明されている。上述の解の精度保証付き数値計算法も同様に解の存在するための十分条件を構築し、計算機を用いてその条件の成立を確認することで検証する。その計算機で確認できる十分条件を構築するための準備として定数の定量的かつ最良に近い定数値まで求める必要に迫られる。そのような背景から既存の精度保証付き数値計算法の研究で用いられていた評価法を見直すことでより検証が成功しやすくなるような定数値の新評価法を検討する。

(2) 解が存在するための計算可能な十分条件の構築

「1. 解の検証に必要な定数値の新評価法の提案」で検討した定数の新評価法を用いて実際に偏微分方程式の解を検証するための計算機を用いてチェックが可能な十分条件の提案と実装をする。まず、放物型方程式に対する上述の特殊な解が存在するための十分条件を解析学で用いられる非線形微分方程式の定理を応用して構築する。次に計算機を用いてその十分条件の成立の可否を確認できるように変形する。これにより十分条件にある抽象的な表現を計算機で処理できるようにする。例えばその十分条件の成立の可否に近似解との誤差定数値が必要だとする。この誤差定数の値は偏微分方程式自体や近似解の設定によ

て変動することもあるため、普通に計算機を実行しただけでは計算できません。したがってその定数の値を「1. 解の検証に必要な定数値の新評価法の提案」に戻ってうまく計算機を用いて算出可能な値の導出法を検討する必要があります。最終的に十分条件全ての項目の成立の可否が計算機で確認できるようになり、計算機を用いて特殊な解の存在検証ができるようになる。

4. 研究成果

主要な研究成果を以下にあげます。

(1) 解の検証に必要な定数値の新評価法の提案に対する成果

放物型方程式の解の精度保証付き数値計算法改良のために放物型方程式の半離散近似解に対する誤差定数値の定量的な評価法を提案しました。この定数値は放物型方程式の解の存在を示す十分条件の構築の根幹を成しており、この定数値が最良に近いほど精度保証付き数値計算法の性能も格段に上がる。既存の研究で提案された評価法を精密化して誤差定数のある種の最良値を導出することができた。この成果により精度保証付き数値計算法の長時間における解の検証がしやすくなり、偏微分方程式の様々な解の挙動を計算機で解析しやすくなった。この改善手法を用いると精度保証付き数値計算法による解の検証の性能が既存のものに比べて8倍程上がった。さらにその評価法によって得られた誤差定数値は楕円型方程式の射影誤差定数と一致するという数学的に興味深い結果を得られた。(引用文献)

(2) 解が存在するための計算可能な十分条件の構築に対する成果

本研究の最大の成果物が藤田型方程式の爆発解の数値的検証法と爆発時間のシャープな評価法です。解の爆発現象をざっくりいうと解の(ノルムの)大きさが無限大に大きくなる現象を指す。この爆発現象の研究も様々な角度から行われている。非線形偏微分方程式の特殊な解を検証する本研究テーマの一環として「いつ爆発現象が発生するのか」に着目して研究した。「いつ爆発現象が発生するのか」という問題も既存の数学の研究では明確な解答が得られておらず、精度保証付き数値計算法を利用することでその問題を解決しようというものである。

その手法について説明する。まず、ある有限な時間 T まで放物型方程式の解の精度保証付き数値計算法により有界な解の存在(この時間帯では解の爆発はおこっていないことに注意する)を検証する。次に精度保証付き数値計算法で検証できた解のノルム値の評価を用いて藤田型方程式のエネルギー-汎関数の値を計算する。最後に求めたその値から時刻 T 以降の解が爆発することを数学的に証明し、同時に爆発時間も具体的に計算するという流れです。

この提案手法によって既存の研究成果では藤田型方程式の解の挙動がどうなるか証明できない場合も解の爆発現象が発生することが数学的に証明でき、爆発時間の厳密な範囲も算出することができた。(引用文献)

<引用文献>

Makoto Mizuguchi, Mitsuhiro T. Nakao, Kouta Sekine, Shin'ichi Oishi, Error Constants for the Semi-Discrete Galerkin Approximation of the Linear Heat Equation, Journal of Scientific Computing, Vol.89, 2021

Makoto Mizuguchi, Kouta Sekine, Kouji Hashimoto, Mitsuhiro T. Nakao, Shin'ichi Oishi, Rigorous numerical inclusion of the blow-up time for the Fujita-type equation, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol.40, 2022

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Mizuguchi Makoto, Sekine Kouta, Hashimoto Kouji, Nakao Mitsuhiro T., Oishi Shin'ichi	4. 巻 40
2. 論文標題 Rigorous numerical inclusion of the blow-up time for the Fujita-type equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 665 ~ 689
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-022-00545-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mizuguchi Makoto, Nakao Mitsuhiro T., Sekine Kouta, Oishi Shin'ichi	4. 巻 89
2. 論文標題 Error Constants for the Semi-Discrete Galerkin Approximation of the Linear Heat Equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Scientific Computing	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10915-021-01636-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 水口 信, 中尾 充宏, 橋本 弘治, 関根 晃太, 大石 進一
2. 発表標題 放物型方程式の全離散近似に対する誤差評価について
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高橋 宗久, 関根 晃太, 水口 信
2. 発表標題 3つのHilbert空間の組における最良な射影誤差定数について
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 水口 信, 中尾 充宏, 関根 晃太, 大石 進一
2. 発表標題 楕円型方程式と放物型方程式に対する半離散ガレルキン近似の誤差定数について
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 水口 信
2. 発表標題 藤田型方程式の解の爆発時間に対する数値的検証法
3. 学会等名 有限時間特異性の包括的記述に向けた 数学解析・計算機援用解析の展開「有限時間特異性」勉強会 第3回（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 水口 信
2. 発表標題 放物型方程式の半離散近似に対する誤差定数値の評価について
3. 学会等名 第5回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会 (NVR 2021) ・ JST/CREST「モデリングのための精度保証付き数値計算論の展開」成果報告会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Makoto Mizuguchi
2. 発表標題 Numerical verification method for a blow-up solution of Fujita-type equation
3. 学会等名 International Workshop on Reliable Computing and Computer-Assisted Proofs (ReCAP 2022) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 水口 信
2. 発表標題 藤田型方程式の解の爆発時間に対する計算機を用いた数値的包含方法について
3. 学会等名 2020年度 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 水口 信
2. 発表標題 線形熱方程式の解と半離散近似解との誤差評価の改善
3. 学会等名 日本応用数理学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Mizuguchi, Kazuaki Tanaka, Kouta Sekine, and Shin'ichi Oishi
2. 発表標題 Estimation of Sobolev embedding constant on a bounded convex domain
3. 学会等名 The 18th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computations(SCAN 2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 水口 信, 関根 晃太, 中尾充宏, 大石進一
2. 発表標題 半線形熱方程式の解の精度保証付き数値計算法について
3. 学会等名 第2回 精度保証付き数値計算の実問題への応用研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------