

令和 2 年 7 月 13 日現在

機関番号：55301

研究種目：若手研究

研究期間：2018～2019

課題番号：18K13472

研究課題名(和文)パーコレーション・乱流の平衡/非平衡相転移：共形場理論からのアプローチ

研究課題名(英文) Taming the (non-)equilibrium phase transitions of percolation and turbulence via generalized CFT

研究代表者

島田 悠彦 (Shimada, Hirohiko)

津山工業高等専門学校・総合理工学科・特命助教

研究者番号：20751192

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 800,000円

研究成果の概要(和文)：気体や液体の振舞いのように無数の分子が相互作用して創発する現象は一般に非常に複雑である。しかし相転移点に注目すると、共形場理論(CFT)という数学的枠組みからしばしば臨界指数等の正確な情報をひきだせることは理論物理の大きな成果であった。本研究では、乱流遷移やパーコレーションといった非平衡や非ユニタリという特徴をもつ相転移点に、CFTの枠組みの適用するための基礎的研究を行った。特に、乱流の実験データ解析における有限時間スケーリングや、時間と空間の対称性が崩れた非相対論的CFTにおける4点関数、 W 代数の対称性をもつ非ユニタリ1径数族模型における基本場の同定等、手がかりになる結果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

乱流遷移は重要だが、実際に実験やシミュレーションで調べるのは難しい。乱流では、有向パーコレーションという時空の対称性が破れた相転移の普遍性クラスとの対応など、驚くべきことに統計力学や場の理論と深い関わりが示唆されている。本研究の成果は、共形場理論(CFT)のような統計力学の強力な枠組みで乱流を明らかにするための基礎となる。具体的にはCFTで非ユニタリ系での基本場や時空の対称性が破れた系での4点関数を計算した。またレイノルズ以来の懸案であるパイプ流について実験家と協力し有限時間スケーリングという解析法を構築した。これには臨界レイノルズ数の精密な見積りのような工学上の問題へ応用が考えられる。

研究成果の概要(英文)：Emergent phenomena, such as the behavior of gases and liquids, are very complex in general. However, if we focus on the phase transition point, the mathematical framework of conformal field theory (CFT) can be often used to compute the exact critical exponents, which is a remarkable achievement of theoretical physics. In the present study, we have studied phase transitions such as turbulent transitions and percolation, which are characterized by non-equilibrium and non-unitarity. The basic research for the application of a CFT-inspired framework to such systems was performed. We find various clues, in particular, finite time scaling in experimental data analysis of turbulent flows, 4-point function in non-relativistic CFT, and the identification of the fundamental field in a non-unitary one-parameter-family model with the W -algebra symmetry.

研究分野：統計場の理論

キーワード：有向パーコレーション 層流・乱流転移 動的臨界指数 時空異方的スケール不変性 有限時間スケーリング 非相対論的共形場理論 臨界レイノルズ数 W 代数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

乱流・層流転移のような平衡から大きく外れた非平衡系の理解は一般に難しい問題である。しかし相転移点に注目してみると、実験的には平衡系と同様に臨界指数等で決まる普遍性クラスに分かれることが示唆され、理論的には時間と空間の(ローレンツ)対称性が破れた時空異方的なスケール不変性を持つ繰りこみ群の固定点としてとらえることが可能と考えられている。一方、平衡系の相転移ではそのような異方性はなく、共形場理論(CFT)という数学的な枠組みにより 2 次元空間で厳密な臨界指数を決定できるという著しい性質が知られていた。特に近年、CFT の根底にある無限個の拘束条件を解くというブートストラップ法が、ユニタリ性という仮定をもとに 3 次元空間の相転移において数値的に実装されて長年の難問に突破口をもたらした大きな注目を集めていた。この発展に際し私は萌芽研究で、高分子のフラクタル次元を明らかにすることで、ユニタリ性の仮定を外した CFT の普遍性クラスについてもブートストラップ法が有効であることを実証した。

2. 研究の目的

上記の非ユニタリ系における部分的成功から、ブートストラップ法のアイデアがロバストで、しかるべき拡張をすれば乱流遷移のような非平衡相転移にも適用可能ではないかという着想を得た。この考えを推し進めて共形場理論のブートストラップ法を高分子やパーコレーションに代表される非ユニタリ CFT に適用し、さらには時空異方的な固定点へと一般化して、非平衡系の普遍性を決定する枠組みの基礎を築くことが本研究の目的であった。

3. 研究の方法

研究期間の 2 年間では、理論と実験の両面を念頭に研究を進めたが、最終年度は研究環境の変化により理論に力を入れることになった。実験では、OIST における流体実験の若手と連携し乱流遷移を非平衡相転移として測定するにあたっての困難点を数値的・解析的に検討した。また、非平衡相転移の時空の異方性をもつ場合の場の理論を素粒子論の研究者と共同で解析しブートストラップ法の鍵となる 4 点関数を解析的に計算した。非ユニタリ CFT については、必要な群論の代数的考察をソルボンヌ大学の可積分系の若手と連携して行い、また高分子等の CFT におけるユニタリ性の破れの弱さに関する漸近解析を進めた。

4. 研究成果

1 次元乱流遷移はレイノルズの観察以来の重要なテーマであるが、乱流の種であるパフの寿命は著しく長いため、短いパイプにおいて乱流遷移を測定すると臨界レイノルズ数がばけやすいことが分かった。この問題に対処するため、実験家と共同で、パイプ流における 1 次元乱流遷移を解析するために有用な有限時間スケージングの枠組みを構築した。繰りこみ群の観点を融合させた我々の新しい枠組みで検討すると新たな

解析が可能であることが分かった。また生態系モデルを各空間次元で数値計算すると被食者コロニーの寿命は乱流の種（パフ）と同様のレイノルズ依存性を持つことが分かった。乱流実験も生態系モデルも有向パーコレーションの普遍性クラスと整合的であることが分かった。

また、時間と空間のローレンツ対称性が破れた時空異方的なスケール不変性を持つ繰りこみ群の固定点に向けて、CFT のロジックの拡張を試みた。演算子積展開（OPE）と4点関数を具体的に厳密に計算し、動的臨界指数が $z=2$ となる非相対論的共形場理論の例を構成した。ここでは特に1径数を持つベッセル関数の漸近展開と冪展開の双方がブートストラップ法に現れるのが特徴的である。以上のような重要な示唆が得られ、非平衡系の普遍性クラス（時空異方的となる固定点）を明らかにする枠組みを構築するために必要な基礎的な理解を進めることができた。

さらに非ユニタリ CFT については、Virasoro 代数の対称性を拡大した W 代数の族共形場理論における fundamental spin field (以下、基本場)の fusion を研究した。この fusion は OPE のデジタルな側面(不連続な選択則)を決め、OPE 係数はアナログな側面(多重三角関数のような解析的振る舞い)を決める。後者の零点や極の配置には無限階層性が見られ、保型関数と類似している。パーコレーションの解析の鍵となる、一径数族の基本場を同定し、代表者の異動後に論文にまとめた。W3 代数では共形ブートストラップの数値研究が一步進んでいたが、これにより解析解に向けて一步近づくことができた。この結果は、非ユニタリ CFT において階層的な指数関数的に弱いユニタリ性の破れを解析的に導くための手がかりとなると期待される。特に指数関数的に弱いユニタリ性の破れの普遍的な振る舞いは演算子積展開の係数に現れることが分かった。これを Virasoro 代数の場合に具体的に計算し、W 代数の場合は WKB 法による予想をたてることができた。今後は非ユニタリ CFT において指数関数的に弱いユニタリ性の階層的破れをさらに具体的に調べることが重要である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yacine Ikhlef and Hirohiko Shimada	4. 巻 53
2. 論文標題 Fusion of spin fields in W3 conformal field theories	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 15203
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ab56e3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 サーバス・ローリー, 島田悠彦
2. 発表標題 短いパイプにおける乱流遷移
3. 学会等名 日本物理学会2018年年次大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hirohiko Shimada
2. 発表標題 One-parameter-family of OPEs and their universal asymptotics
3. 学会等名 The XIX International Congress on Mathematical Physics (ICMP2018), Montreal, Canada (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hirohiko Shimada
2. 発表標題 The hierarchy of the OPE coefficients and the low-lying operators in CFT
3. 学会等名 LPTHE mathematical physics seminar, Sorbonne university, Paris (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 島田英彦, 島田悠彦
2. 発表標題 OPE and 4-point functions in an exactly solvable model with space/time anisotropic scaling symmetry
3. 学会等名 日本物理学会2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hirohiko Shimada, Yacine Ikhlef
2. 発表標題 Fundamental spin fields in conformal field theories
3. 学会等名 The 2nd International Conference on Symmetry (Symmetry 2019), Benasque, Spain (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考