様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月　８ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究
研究期間：2018～2019
課題番号：１８Ｋ１８０６３

研究課題名（和文）境界要素法におけるCalderonの前処理の新しい実装法

研究課題名（英文）New implementations of the Calderon preconditioning for boundary element methods

研究代表者
新納　和樹（Niino, Kazuki）

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：１０７２８１８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では偏微分方程式の数値解法の一つである境界要素法において，線型方程式を反復法で解く際の高速化法であるCalderonの前処理の新しい実装法を提案した．Calderonの前処理は他の前処理と比べて大幅に反復回数を削減できるという利点を持つ一方で，離散化の際に特殊な基底関数が必要になるために一回の反復にかかる計算時間が増加するという欠点があった．本研究では作用素の正則化法を上手くCalderonの前処理に現れる作用素に適用することで，特殊な基底関数を用いないCalderonの前処理を提案した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究で開発した数値解法はLaplace方程式やHelmholtz方程式，Maxwell方程式など応用上重要な様々な方程式に適用可能であり，特に自由度が大きい問題に対して効果的であるため，様々な工学の分野で現れる大規模問題を解くための基礎的研究として重要であると考えられる．また本研究では新しい前処理法を開発しただけではなく，この前処理法が一見異なる既存の定式化とよく似ていることを発見し，これによって精度を改善した新しい積分方程式の定式化の開発などへとつながっているため，学術的にも今後の発展性のある研究であると言える．

研究成果の概要（英文）：In this research, we developed a new implementation of Calderon's preconditioning, which is one of acceleration methods for iterative linear solvers in boundary element methods. Calderon's preconditioning is known to significantly reduce the iteration numbers of iteration methods. Application of Calderon's preconditioning however takes more computational time for each iteration since use of a certain special basis function, which causes the increase of the computational time, is necessary. We propose an implementation of Calderon's preconditioning, which avoids the use of the special basis function by applying well-known regularizing method to operators appeared in Calderon's preconditioning.

研究分野：計算電磁気学

キーワード：Calderonの前処理　境界要素法　境界積分方程式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

偏微分方程式の数値解法の一つである境界要素法では、最終的に問題を線形の代数方程式に帰着し、これを反復法で解くことで解を求めることが一般的であるが、この代数方程式の係数行列が密行列となることから全体の計算時間が反復法の反復回数に大きく依存するため、前処理と呼ばれる方法によって反復回数を削減することが重要である。近年、境界要素法に特化した前処理法として Calderon の前処理が注目され、盛んに研究されている。Calderon の前処理は境界要素法が扱う積分作用素が満たす Calderon の公式を用いた前処理法で、他の前処理と比較して反復回数が著しく削減できるという特徴がある。一方、最近の研究では Calderon の前処理では通常離散化に用いられる一般的な基底関数に加えて、この基底関数を構成するためのメッシュを再分割したメッシュ上で定義される特別な基底関数が必要であり、この基底の導入に起因して代数方程式の係数行列や前処理そのものの計算時間が増加するとされてきた。したがって既存の Calderon の前処理の実装法では、反復法の反復回数を大幅に低減できる一方で、一回の反復に要する計算時間が比較的大きくなるという問題があった。

２．研究の目的

前段で述べた背景を受け、本研究は既存の Calderon の前処理の実装で必要となる特別な基底を用いない新しい実装法を開発することを目的とした。Calderon の前処理は次数の異なる積分作用素の積を計算することで、係数行列の条件を良くし、反復回数を削減する方法ととらえることができるが、次数の異なる積分作用素を同じ基底関数で離散化することは難しいため、結果既存の方法では特殊な基底が必要となり、これがメッシュの再分割を要求するために計算時間増加の要因となっていた。本研究では特異性のある核を持つ積分作用素を計算するために広く用いられる、部分積分による正則化法を上述の積分作用素の積に適用することで作用素の次数を揃え、特殊な基底の導入に伴うメッシュの再分割を行うことなく離散化する方法を開発する。

３．研究の方法

本研究の最終的な目的は、アンテナの解析など応用範囲の広い Maxwell 方程式に対する境界要素法における新しい Calderon の前処理の開発であるが、まず初めに前段で述べたアイデアが有効であることを確かめるため、より定式化が簡単な Laplace 方程式において新しい前処理が有効であることを確認した。次に Laplace 方程式よりやや定式化が複雑で Maxwell 方程式と同様に波動現象を記述する Helmholtz 方程式に対して同じアイデアに基づく前処理を開発した。最後にこれらの研究で得た知見を用いて、Maxwell 方程式に対する新しい Calderon の前処理の開発を行った。また本研究を開始する以前に、我々のグループは Maxwell 方程式に対する境界要素法において、「Hdiv 内積を用いた離散化」と呼ばれる離散化法を、低周波破綻（Maxwell 方程式に対する境界要素法の特定の定式化の精度が、低周波域において悪化する問題）の解決という Calderon の前処理とは全く異なる文脈で提案していたが、本研究の過程で「Hdiv 内積を用いた離散化」と本研究で開発した前処理がよく似た定式化であることに気付いたため、その関連性に関する研究も行った。

４．研究成果

（１）Laplace 方程式に対して新しい Calderon の前処理の実装法を開発し、これが有効であることを数値的に確認した。Laplace 方程式における Calderon の前処理は次数の異なる積分作用素の積のみで構成されるため、上述のアイデアを素朴に適用できる。得られた前処理ではメッシュの再分割を行うことなく、同一のメッシュ上で定義される二種類の基底関数を用いて離散化できることがわかった。またこの新しい Calderon の前処理における反復解法の反復回数が既存の Calderon の前処理と同程度であることを数値的に確認した。新しい Calderon の前処理は、メッシュの再分割を行うことなく既存の手法と同程度の反復回数を実現できるため、全体の計算時間が削減できることが期待できる。

（２）Helmholtz 方程式に対しても同様の前処理を開発した。Helmholtz 方程式に対する Calderon の前処理も Laplace 方程式の場合と同様、次数の異なる積分作用素の積のみで記述されるが、部分積分により正則化する過程で Laplace 方程式のときには表れない余分な項が現れる。そのため効率性は Laplace 方程式の場合と比べやや劣るが、依然新しい前処理は有効であることを確認した。また Helmholtz 方程式においても本研究の提案手法と既存の方法が反復法の反復回数を同程度削減できることを数値的に確認した。

（３）Maxwell 方程式に対しても同様の前処理を開発した。Maxwell 方程式に対する Calderon の前処理は同じ積分作用素の 2 乗で記述され、一見すると次数の異なる作用素の積ではないように見えるが、その積分作用素を分割し、展開することで次数の異なる作用素の積の形を作ることができ、これに部分積分を施すことで同様の前処理が開発できることを確認した。図１は様々な

周波数に対する Maxwell 方程式における各数値解法の反復法をまとめたグラフである。図の周波数の範囲のほとんどにおいて、本研究の前処理（青線）はメッシュの再分割を伴う特殊な基底を用いることなく、これを用いた従来的な Calderon の前処理（赤線）とほぼ同じ反復回数を実現している（グラフの左端の挙動については後述）。

（４）（３）で開発した Maxwell 方程式における Calderon の前処理の新しい実装法は、低周波破綻を解決するために以前我々のグループで開発した「Hdiv 内積を用いた離散化」と定式化が非常に似ており、ほぼ等価な方法と解釈できることを確認した。実際、両者の方法は一か所の符号を除いて全く同じ作用素を施す方法と捉えることができる。この事実から「Hdiv 内積を用いた離散化」を、本研究で提案した Calderon の前処理と同じように再分割メッシュ上で定義される特殊な基底を用いずに実装できることを確かめた。また、逆に本研究の前処理が「Hdiv 内積を用いた離散化」と同様に低周波破綻を解決することもわかった。特に後者については、多くの先行研究で Calderon の前処理は低周波破綻を解決しないとされていたが、Calderon の前処理を適切に実装することで低周波破綻を解決できることがわかったという点で学術的に意義深い結果であると言える。実際、図２は様々な周波数に対する Maxwell 方程式における各数値解法の相対誤差をまとめたグラフであるが、この図で本研究の前処理（青線）と従来的な Calderon の前処理（赤線）を比べると、周波数が小さい範囲で従来法は相対誤差が増大し解法が破綻していることがわかるが、本研究の前処理は低周波域においても精度が変わらないことが確認できる。また図１の低周波域において、従来法の反復回数が増大する一方で本研究の手法の反復回数がほぼ一定であることも同様の理由によると考えられる。
　またこの２つの数値解法の類似性を用いることで、見かけの固有値を回避した Calderon の前処理や疎行列による Calderon の前処理の実現など、今後新しい数値解法への発展が期待される。

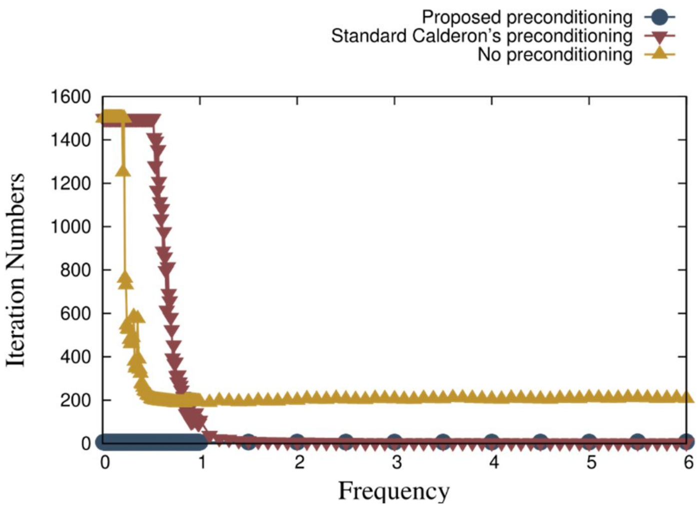

図 1　様々な周波数に対する Maxwell 方程式における各数値解法の反復回数。青線：本研究で提案した新しい Calderon の前処理。赤線：従来的な Calderon の前処理。黄線：前処理無し。

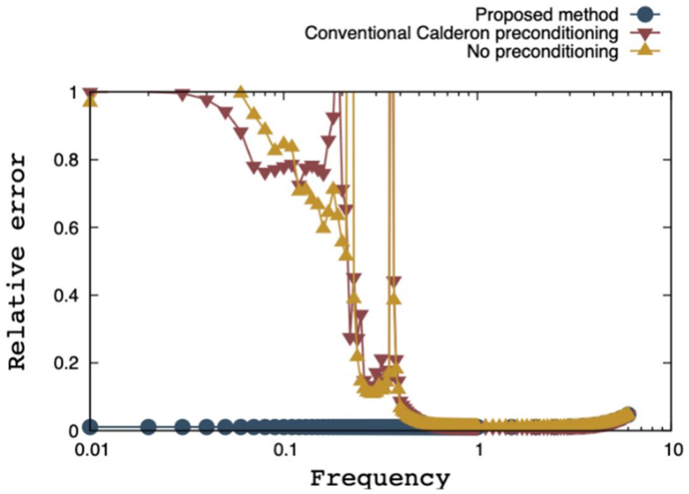

図 2　様々な周波数に対する Maxwell 方程式における各数値解法の相対誤差。青線：本研究で提案した新しい Calderon の前処理。赤線：従来的な Calderon の前処理。黄線：前処理無し。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 新納和樹、大塚悠貴、西村直志	4．巻 18
2．論文標題 Calderonの前処理を用いた3次元Laplace方程式に対する境界積分方程式の離散化について	5．発行年 2018年
3．雑誌名 計算数理工学論文集	6．最初と最後の頁 53--58
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　3件／うち国際学会　5件）

1．発表者名 新納和樹
2．発表標題 A discretisation method for the elctric field integral equation using the Hdiv inner product without the barycentric refinement
3．学会等名 International conference on electromagnetics in advanced applications（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 新納和樹
2．発表標題 The galerkin discretisation for the EFIE with the Calderon preconditioning using the integration by parts
3．学会等名 International symposium on electromagnetic theory（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 新納和樹
2．発表標題 Eigenvalue computations for periodic boundary value problems for Maxwell's equations with the periodic FMMs and the Sakurai-Sugiura projection method
3．学会等名 Taiwan-Japan joint workshop on inverse problems and related topics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

１．発表者名
新納和樹

２．発表標題
Computation of layer potentials in the BEM with the space-time method for the heat equation in 2D

３．学会等名
IABEM symposium（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
新納和樹

２．発表標題
Calderon's preconditioning for the EFIE without the barycentric elements

３．学会等名
IEEE International symposium on antenna and propagation（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
新納和樹

２．発表標題
境界要素法における重心要素を用いないCladeronの前処理に関する一考察

３．学会等名
日本応用数理学会

４．発表年
2018年

１．発表者名
大塚悠貴

２．発表標題
3次元Laplace方程式に対する境界要素法における分割メッシュを用いないCalderonの前処理について

３．学会等名
計算工学講演会

４．発表年
2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考