

令和 6 年 6 月 11 日現在

機関番号：12102

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K18708

研究課題名（和文）無限次元代数を利用した群の表現論の拡張および創生

研究課題名（英文）Development of representation of group by infinite dimensional algebras

研究代表者

宮本 雅彦（MIYAMOTO, Masahiko）

筑波大学・数理物質系（名誉教授）・名誉教授

研究者番号：30125356

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,800,000 円

研究成果の概要（和文）：頂点作用素代数は2次元共系場理論に数学的公理を与えたものと現在では理解されている無限個の積演算を持つ無限次元代数である。その中心電荷24の正則頂点作用素代数の分類問題は、重要な古典問題の1つであり、研究代表者も30年前から、研究の主目的の1つとして取り組んできた。本研究では、ランク24の正則正定値偶格子分類の歴史において美しい方法といわれた方法を拡張して、群の通常の表現の利用法とは異なる方法を取り、群の表現と自己同型に対応する代数の内部無限次元代数の表現を同時に利用することで、ヘーン観測の真の意味を説明し、非ムーンシャイン型の統一的分類問題に対する自然な最終回答を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

頂点作用素代数は物理における2次元共系場理論に数学的公理を与えたものであり、代数だけではなく、表現論、数論、幾何、数理物理とつながっており、その研究は数学だけでなく、広い意味で学術的意義が大きい。特に、本研究で扱った正則頂点作用素代数の分類問題は、重要な場の理論の分類であり、その価値は高い。また、この研究は当初、日本やアメリカでの研究が進んでいたが、最近ではドイツのグループが統一的な証明を与えるなど、国際グループ間での競争の形を呈していた。その中で今回、日本のグループが最終的に非常に自然な形で統一的分類問題を解決できたことは、学術的意義だけではなく、社会的意義を大いに有ると判断できる。

研究成果の概要（英文）：A vertex operator algebra gives a 2-dimensional conformal field theory in physics rigorous mathematical axioms. It is an infinite-dimensional algebra with infinitely many bilinear products. Classifying holomorphic vertex operator algebras with central charge 24 is one of the most essential classical problems and P.1 has been attacking this problem for 30 years. In this project, imitating a beautiful method in the classification of unimodular positive definite even lattices of rank 24, we succeeded in giving a natural unified proof for the classification of holomorphic vertex operator algebras with central charge 24 except for the moonshine type by using representations of inner structures of vertex operator algebras corresponding to automorphisms and explain Heon's observation. Namely, we realized group representations by using an inner structure of infinite dimensional algebras. This method is far from the classical way of group representation theory.

研究分野：algebra

キーワード：無限次元代数 表現論 有限群 正則頂点作用素代数 自己同型群 コンウェイ群 リーチ格子 深洞

1. 研究開始当初の背景

(1-1) 頂点作用素代数は、もともと有限単純群の分類問題の研究途中で発見されたモンスター単純群における有限単純群の表現と数論の保形関数との間の神秘的な関係を示すムーンシャイン予想を解決するために Borchers により導入された概念であるが、現在では物理における 2 次元共系場理論に数学的公理を与えて厳密に定義したものと理解されている。それゆえ、その研究は、出発点の群論だけではなく、組み合わせ論、リー代数、表現論、幾何、数論、数理論理など非常に多くの分野と関係しており、その学術的価値は年々高まっている。ただ、頂点作用素代数は無限個の積演算を持つ無限次元代数である上に、その積演算に関して、下に有界(トランケーション)と局所可換という無限個の関係式を同時に満たさなければならないために、その構造を解析するのは非常に難しい。しかしながら、その出自が示すように、有限群の表現との相性は非常に良く、群自身の研究手段としても利用価値があり、研究代表者はその点に着目して、この研究を続けている。

(1-2) これまで、代表研究者は導入時に証明のための技巧的条件にすぎないとみられていた頂点作用素代数における C_2 余有限性という性質に注目し、頂点作用素代数のトレース関数のモジュラー不変性、加群同士のフュージョン積の存在など、その有用性を色々な面で証明してきた。逆に、これまでの研究から、 C_2 有限性を示すことで、頂点作用素代数の表現や構造がかなり決定できることも分かってきていた。

(1-3) 頂点作用素代数研究の当初から、既約加群が一つしか持たないホロモルフィック頂点作用素代数(1つの2次元共系場理論が全体を覆う場の理論)の分類は大きな古典的問題であった。中心電荷は8の倍数の自然数であることがわかり、中心電荷8と16は完全に分類されていたので、次の中心電荷24のホロモルフィック頂点作用素代数の分類はムーンシャイン頂点作用素代数も含むので重要な研究対象となっていた。ウエイト1空間を与えるアフィンリー代数の表現を使うことで、予想としてウエイト1空間構造の71個の可能性が与えられていたが、15年ほど前までは当初から知られていた40個程度しか確認されていなかった。15年ほど前に、研究代表者をはじめとする日本の研究グループが、次々と新しいものを構成し、最終的に71個構成され、ムーンシャイン型と呼ばれるもの以外の一意性も証明された。しかし、残念ながらその証明は個別対応であり、計算が主体で、自然なものではなかったため、統一的証明を望む声が高まっていた。また、それらの研究において、Hohn の観測と呼ばれるニイマイヤ格子と軌道理論の不思議な対応も発見されていた。

2. 研究の目的

研究目的の基本的出発点は、モンスター単純群の位数2のある元が物理におけるスピノール(フェルミオン)で生成された2次元イジング模型と呼ばれる部分代数と対応していることを示した研究代表者の初期の結果である。このような場合には、群の元やその中心化部分群や置換表現等の多くの情報が、頂点作用素代数の言葉で説明できるのである。この考えを発展させ、群の表現と部分頂点作用素代数の表現を同時に扱うという標準的な群の表現論とは異なる考えの下に、次の2点を考察した。

(2-1) 頂点作用素代数の古典的問題の一つであり、昨今、日本、アメリカ、ドイツのグループによって競争して見つけ出そうとしている中心電荷24の正則頂点作用素代数の分類の統一的に説明を、上に述べた群の表現と頂点作用素代数の表現の組で理解するという考えのもとに、解決したい。特に、頂点作用素代数の基本部分を構成しているのが格子であるが、その中で、ランク24のユニモジュラー格子の分類問題はホーリー構成やローレンツ格子を利用した方法など、美しいと呼ばれる分類方法があるので、その自然な拡張を試みたい。

(2-2) 有限群の表現論は、複素表現における指標の理論と p 元における性質をかなり削減したと思われるモジュラー表現の2つだけが残っている状態であり、この2つだけでは解決できない原田予想 II のような問題がかなりある。それゆえ、群の表現と相性の良い頂点作用素代数などの無限次元代数を利用して、群の表現と無限次元代数の表現を考えることで、群の表現の通常の利用法を超えた活用を上記の問題以外にも考えたい。

3. 研究の方法

(3-1) まずは、頂点作用素代数とモジュラー群との関係から頂点作用素代数のモジュラー不変性に関する考察を、この分野の専門家である Mason 氏(カリフォルニア大学)や彼のグループと議論しながら発展させる。

(3-2) 次に、上記の(2-1)の問題に対しては、リーチ格子の自己同型群であるコンウェイ群が大きい

な働きをすることはわかっている。例えば、ドイツのグループはコンウェイ群の元ごとに、軌道変形された頂点作用素代数の指標を計算することで、統一的な分類の証明を与えた。本研究では、群の元とリーチ格子の2つを組とすることで、頂点作用素代数の内部構造(部分頂点作用素代数)が決まる点に注目し、有限群の研究者である千吉良氏(熊本大学)や頂点作用素代数の一意性の研究を進めてきた Lam 氏(台湾中央研究院)との共同研究をすすめ、リー代数研究者の Adamovic 氏(ザグレブ大学)のグループと議論を進めることで、群の表現から与えられる軌道変形された頂点作用素代数の構造を求めることを目指した。

(3-3) 上記の(2-2)の問題に対しては、例えば、群 G が n 個の元の置換群に埋め込まれる場合、物理で基本的な働きであるフェルミオン n 個の積となる超頂点作用素代数に自己同型群として G が作用する。すると、置換とは関係ない非常に特殊な超頂点作用素代数が内部に含まれている。これにより、ギャノン氏が証明したマッシュー群によるムーンシャイン予想(マッシュー予想)なども別説明ができる。それゆえ、より一般にコンウェイ群に対して、Gannon 氏(アルバータ大学)や Adamovic 氏(ザグレブ大学)との議論を通して、同様の現象を調べる。

4. 研究成果

(4-1) まずは、基本となる手段である頂点作用素代数におけるモジュラー不変性に関する考察を行い、論文として発表した。これにより、 $C2$ 余有限性を見つけることで頂点作用素代数の内部構造をある程度考察できることを見つけた。これは分類問題の解決に向けて、すなわち、残されたムーンシャイン型頂点作用素代数の一意性の証明に向けて、大きな進展である。

(4-2) これまでの統一的分類方法は、軌道理論を使うものであるが、軌道理論は抽象的概念であり、個々の自己同型で定義されたものなので、指標以外の構造は非常に分かりづらい。そこで群の表現と無限次元代数の表現の組を考える利用法を応用し、中心電荷 $2/4$ の正則頂点作用素代数の統一的分類問題の大きな進展を得た。まず、コンウェイ群の元のうち、軌道理論に使える可能性のある元全体の性質を把握し、次に述べる方法で軌道構成の自然な別構成を千吉良(熊本大学) Lam 氏(台湾中央研究院)との共同研究で与えた。すなわち、コンウェイ群の上記の元たちで生成されるアーベル部分群に対して、それに対応する頂点作用素代数の内部構造を決定し、今回の群の表現と無限次元代数の表現を同時に使うことにより、ランク $2/4$ のユニモジュラー格子の分類で使われたホーリ構成と同じように、軌道構成されたものの構造が良くわかるようになった。

(4-3) さらに、Lam 氏(台湾中央研究院)との共同研究で、群と頂点作用素代数、さらにリーチ格子の3つ組のもとで、群の元で固定されるリーチ格子の深洞とそれに対応する頂点作用素代数の部分代数を考えることで、前回の結果の逆軌道構成が構成できることを示した。これにより、名称に過ぎない(自己同型なのに深洞の名前を持つ)拡張深洞の真の意味を与え、中心電荷 $2/4$ の正則頂点作用素代数の統一的分類問題はムーンシャイン型(ウエイト 1 を持たないもの)を除いて、統一的分類問題に対して最終結果を与えた。さらに我々の自然な構成は、無限次元代数の表現を同時に含むことで、不思議な関係と思われていた Hohn 観測をも自然なものであることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ching Hung Lam, Masahiko Miyamoto	4. 巻 11
2. 論文標題 A lattice theoretical interpretation of generalized deep holes of the Leech lattice vertex operator algebra	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Forum Math. Sigma	6. 最初と最後の頁 1-36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoki Chigira, Ching Hung Lam, Masahiko Miyamoto	4. 巻 593
2. 論文標題 Orbifold construction and Lorentzian construction of Leech lattice vertex operator algebra	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 26-71
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Masahiko Miyamoto	4. 巻 753
2. 論文標題 Vertex operator algebras and modular invariance	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 233-250
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 9件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Masahiko Miyamoto
2. 発表標題 Associativity of fusion products of C_1 -cofinite N -gradable VOA modules
3. 学会等名 Conference in Finite Groups and Vertex Algebra（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宮本雅彦
2. 発表標題 Leech lattice and holomorphic VOA
3. 学会等名 数理解析研究所研究集会「有限群論，代数的組合せ論，頂点代数の研究」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宮本雅彦
2. 発表標題 VOAのC1-cofinite N-gradable modules のフュージョン積の結合性について
3. 学会等名 代数シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Mashiko Miyamoto
2. 発表標題 On C2-cofiniteness of commutant subVOA
3. 学会等名 Representation theory XVI (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Miyamoto
2. 発表標題 Deep holes of Leech lattice VOA
3. 学会等名 Research on algebraic combinatorics, related groups and algebras (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Miyamoto
2. 発表標題 C2-cofiniteness of orbifold model
3. 学会等名 Xiamen Workshop on Lie Theory and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 宮本雅彦
2. 発表標題 頂点超代数とChiral de Rham complex の紹介
3. 学会等名 第31回有限群論草津セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Mashiko Miyamoto
2. 発表標題 From Mathieu to Conway
3. 学会等名 Vertex Operator Algebras and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masahiko Miyamoto
2. 発表標題 A combinatorial world using a super vertex operator algebra
3. 学会等名 Taipei International Workshop on Combinatorics and Graph Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Miyamoto
2. 発表標題 C2-cofiniteness of orbifold model
3. 学会等名 Xiamen Workshop on Lie Theory and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	千吉良 直紀 (Chigira Naoki) (40292073)	熊本大学・大学院先端科学研究部(理)・教授 (17401)	頂点作用素代数上の有限群の作用に関する考察

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------