

令和 6 年 5 月 29 日現在

機関番号：12608

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2018～2023

課題番号：18K18711

研究課題名（和文）新しい $p$ 進 $L$ 関数の探求と派生する保形 $L$ 関数の問題研究課題名（英文）Search for new  $p$ -adic  $L$ -functions and some related problems on automorphic  $L$ -functions

研究代表者

落合 理 (Ochiai, Tadashi)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：90372606

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究計画においては、  
(I)  $GSp(4)$ の岩澤理論、(II) Coleman変形族の岩澤理論、(III)  $CM$ 体上やArtin表現の岩澤理論、(IV) 高階数のEuler系の理論などの研究を行なった。(I)では、 $GSp(4)$ のAdjoint表現の $L$ 関数の特殊値の $p$ 進的な性質で進展があった。(II)では、Coleman変形の formal modelとその応用を研究した。(III)では、 $CM$ 体の上上のArtin表現の $p$ 進 $L$ 関数の構成や岩澤主予想の結果が得られた。(IV)では、ガロワ変形の場合に階数1のEuler系と高階数のEuler系に関する理論を確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

現代の整数論においてゼータ関数は最も重要な中心的研究対象であり、そのゼータ関数の研究において現在最も有望で最も重要な理論である岩澤理論の研究に向き合っている。ガロワ表現の変形の一般化が大事だという視点で切り込んでおり、その方向で理論に大きなインパクトがある現象を研究してきた。今回は特に保型 $L$ 関数の理論と岩澤理論を跨ぐ研究を行いいくつかの成果を得たことが特筆すべき点である。今後、岩澤理論の領域と保型 $L$ 関数の理論の領域の研究をより密接に関連させてこの分野の研究が活発になっていくことが期待される。

研究成果の概要（英文）：With this grant, I executed the following projects

(I) Iwasawa theory for  $GSp(4)$ , (II) Iwasawa theory for Coleman families, (III) Iwasawa theory for Artin representations over a  $CM$  field, (IV) Euler system theory for higher rank Galois representation.

On the project (I), The research on the  $p$ -adic properties of the special values of Adjoint  $L$ -functions of  $GSp(4)$  has progressed. On the project (II), we studied the formal model of a Coleman family and we established a basic setting for a positive slope analogue of the Iwasawa theory for Hida deformation. On the project (IV), we studied the higher rank Euler system and the rank one Euler system over a Galois deformation space.

研究分野：整数論，数論幾何学

キーワード：岩澤理論 肥田理論 Coleman編継続  $p$ 進 $L$ 関数 Siegelモジュラー形式

## 1. 研究開始当初の背景

申請者は、肥田や Mazur によるガロア表現の変形と岩澤理論を融合させて、今までの理論を含む自然な一般化を発展させることを目指して研究を進めてきた。岩澤理論と変形理論の融合案は、Greenberg 氏が 90 年代初めのシアトルにおける国際研究集会で発表し、集会の報告集の中の査読無しの論文で提唱されていた。しかしながら、その後ほとんどその方向性での仕事がなされないまま、停滞したり忘れ去られていた。おそらく、一般の変形空間に対して通用する道具が確立されておらず技術的に難しかったのが、長らく進展がなかった大きな理由であったと思われる。申請者は、有理数体上の  $GL(2)$  の ordinary な肥田変形に狙いを定めて、困難を少しずつ克服しながら、変形空間の岩澤理論の最初の例を築いた。 $GL(2)$  の ordinary な肥田変形において岩澤主予想を部分的に解決し、新しい数学的現象をかなり明確に理解するに至ったのが本研究計画開始当初の背景である。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、保型  $L$  函数の分野での最近の研究成果を取り入れて、岩澤理論の一般化で重要な役割を演じる  $p$  進  $L$  函数の構成の研究に進歩をもたらすことである。1960 年代から 1970 年代の初めにかけて、久保田-Leopoldt, Mazur, 岩澤, Coleman, Manin, Vishik, Amice-Vélu, Mazur らによって代数群  $GL(1)$  や  $GL(2)$  の保型表現に対して  $p$  進  $L$  函数が構成された。様々な別構成や岩澤主予想との結びつきの研究など活発な進展があった。

しかしながら、この 40 年はそれに続くさらに高階数の代数群の保型表現の  $p$  進  $L$  函数の構成には本質的な進歩がなかった。一方で、この数年の間に、保型  $L$  函数の研究では、近年、高階数の代数群の保型表現の場合にも多くの進歩が得られた。それらの最近の研究成果を  $p$  進  $L$  函数に応用することで、 $GL(2)$  以外の高階数の保型表現に対する肥田変形に対して  $p$  進  $L$  函数を構成することや岩澤主予想を目指すこと、あるいはそれらにつながる研究を進展させることが本研究の目的であった。

## 3. 研究の方法

特に次の計画に取り組んだ。

(I) 高階数で多変数の Euler 系と  $p$  進  $L$  関数の関係の一般論の整備

(II)  $GSp(4)$  の adjoint  $L$  関数の特殊値に関する研究

(III)  $GSp(4)$  の sninor  $L$  関数の特殊値に関する Euler 系の構成の探求

2018 年度には、本研究のテーマと密接に関連した国際研究集会をメキシコの BIRS-CMO にてオーガナイザーとして開催した。この研究集会を通してこれらのテーマに関する現状を掘り起こして研究プランを進展させることができた。

(I) に関しては、特に高階数の Euler 系の専門家である Kazim Buyukboduk 氏とガロア表現の変形空間の岩澤理論の専門家である研究代表者との共同研究を行うことによって一般論の整備とその応用を追求する方法をとった。(II) と (III) に関しては、 $GSp(4)$  に関する保形表現論とモチーフ理論の研究に詳しい Francesco Lemma 氏と研究代表者の岩澤理論的な知見を総合して取り組んだ。

## 4. 研究成果

口頭発表

[1] 2023年11月30日

早稲田大学整数論セミナー (早稲田大学)

$GSp(4)$  の adjoint  $L$  関数の特殊値と周期に関する  $p$  進的な話題

[2] 2023年11月8日

Séminaire de théorie des nombres de l'IMJ-RPG (Sorbonne Université (Jussieu))

Les fonctions  $L$  d'Artin  $p$ -adiques sur un corps CM

[3] 2023年1月18日

大岡山談話会 (東京工業大学)

CM 体の Artin 表現に対する  $p$  進  $L$  関数と岩澤主予想

[4] 2022年8月15日

研究集会 “Elliptic curves and the special values of  $L$ -functions” (August 14 - August

- 19) (International Centre for Theoretical Sciences - TIFR/バンガロール/インド)  
 p-adic Artin L-function over a CM-field  
 [5] 2021年12月1日  
 大阪市立大学談話会 (ハイブリッド)  
 ArtinのL関数のp進類似について  
 [6] 2020年6月19日  
 研究集会“第7回京都保型形式研究集会”(June 19 - June 21) (オンライン研究集会)  
 Congruence of automorphic representations and Special values of adjoint L-functions for  $\mathrm{GSp}(4)$   
 [7] 2020年1月22日  
 研究集会“保型形式とL関数の解析的, 幾何的, p進的研究”(Dec.20 -Dec.24) (於 RIMS 京都)  
 Endoscopic congruences and adjoint L-values for  $\mathrm{GSp}(4)$   
 [8] 2019年12月10日  
 研究集会“Workshop on the congruence ideals and p-adic L-functions”(Dec.10 -Dec.11)  
 (於 Academia Sinica, Astro-Math building, Taipei, Taiwan)  
 Congruences between endoscopic representations and non-endoscopic representations of  $\mathrm{GSp}(4)$  modulo adjoint L-values  
 [9] 2019年11月18, 19日  
 研究集会“CMC special weeks on number theory”(Nov.11-Nov.22) (於 KIAS/Korea)  
 Iwasawa Main Conjecture for Galois deformation spaces and glueing of Euler systems I, II  
 [10] 2019年10月13日  
 研究集会“2019 大分佐賀整数論研究集会”(於 佐賀大学)  
 $\mathrm{GSp}(4)$ の内視的な保型表現の mod  $p$  合同と adjoint L関数の特殊値  
 [11] 2019年8月5日  
 Number theory colloquium (Indian Statistical Institute, Kolkata)  
 Congruence of modular forms and Special values of adjoint L-functions  
 [12] 2019年7月18日  
 研究集会“Recent advances in the arithmetic of Galois representations”(於 Università di Genova/Italy)  
 Endoscopic congruences and adjoint L-values for  $\mathrm{GSp}(4)$   
 [13] 2019年3月18日  
 セミナー“Seminaire: Groupes Réductifs et Formes Automorphes”(於 Université Paris 7/France)  
 Congruences endoscopiques et fonction L adjointe pour  $\mathrm{GSp}(4)$   
 [14] 2019年2月14日  
 セミナー“Algebra and Number Theory Seminar”(於 University College Dublin School of Mathematics and Statistics/Dublin/アイルランド)  
 Congruences of modular forms and special values of L-functions  
 [15] 2018年10月1日  
 合宿型ワークショップ“Special Values of Automorphic L-functions and Associated p-adic L-Functions”(9/30--10/5) (於 Casa Mathematica Oaxaca/Oaxaca/メキシコ)  
 Overview of p-adic L-function (75分)  
 [16] 2018年9月6日  
 研究集会“Workshop on L-functions, Langlands functoriality and Trace formula, including relative aspects”(9/3-9/7) (於 Porquerolles/France)  
 Endoscopic congruences modulo adjoint L-values for  $\mathrm{GSp}(4)$   
 [17] 2018年5月25日  
 セミナー“Seminaire de la théorie des nombres”(於 Université de Caen/France)  
 La conjecture principale d'Iwasawa pour les familles p-adiques de formes modulaires  
 [18] 2018年5月4日  
 セミナー“Seminaire de la théorie des nombres”(於 Université de Bordeaux/France)  
 La conjecture principale d'Iwasawa pour les familles de formes modulaires p-adiques

#### 発表論文

- [1] 落合理, チャーン賞受賞者紹介: Barry Charles Mazur 氏の業績, 数学、第76巻 第1号 2024年1月 冬季号, pp. 78-88.  
 [2] Kazim Büyükboduk and Tadashi Ochiai, Main conjectures for higher rank nearly ordinary families, Journal of Number theory, Volume 252, November 2023, Pages 1-73.

- [3] Filippo Nuccio, Tadashi Ochiai and Jishnu Ray, A formal model of Coleman families and applications to Iwasawa invariants, *Annals mathématiques du Québec* (2023).
- [4] Francesco Lemma and Tadashi Ochiai, Endoscopic congruences modulo adjoint  $L$ -values for  $\mathrm{GSp}(4)$ , *Kyoto J. Math.* 63 (2), 281--333, (May 2023) DOI: 10.1215/21562261-10428456.
- [5] Somnath Jha and Tadashi Ochiai, Control theorem and functional equation of Selmer groups over  $p$ -adic Lie extensions, *Selecta Mathematica*, volume 26, Article number: 80 (2020).
- [6] Tadashi Ochiai and Kazuma Shimomoto, Specialization Method in Krull Dimension Two and Euler System Theory over Normal Deformation Rings, *Annales mathématiques du Québec* 43 (2019), no. 2, 357–409.

#### 主催した国際研究集会

- [1] 国際研究集会: Special Values of  $L$ -functions (A conference in memory of Claus-Gunter schmidt) (13-17 March, 2023 於 (Paderborn University, Germany)
- [2] 国際研究集会: Special Values of Automorphic  $L$ -functions and Associated  $p$ -adic  $L$ -Functions (CMO-BIRS 18w5053)(September 30 to October 5, 2018 at Casa Mathematica Oxaca, Mexico)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

|  |                     |
|--|---------------------|
| 1. 著者名<br>Somnath Jha and Tadashi Ochiai   | 4. 巻<br>26          |
| 2. 論文標題<br>Control theorem and functional equation of Selmer groups over p-adic Lie extensions | 5. 発行年<br>2020年     |
| 3. 雑誌名<br>Selecta Mathematica  | 6. 最初と最後の頁<br>58 pp |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし  | 査読の有無<br>有          |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-           |

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Kazuma Simomoto, Tadashi Ochiai   | 4. 巻<br>43            |
| 2. 論文標題<br>Specialization Method in Krull Dimension Two and Euler System Theory over Normal Deformation Rings | 5. 発行年<br>2019年       |
| 3. 雑誌名<br>Annales mathematiques du Quebec   | 6. 最初と最後の頁<br>357-409 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s40316-018-0099-0  | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-             |

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 5件）

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai  |
| 2. 発表標題<br>p-adic Artin L-function over a CM-field                           |
| 3. 学会等名<br>Elliptic curves and the special values of L-functions（招待講演）（国際学会） |
| 4. 発表年<br>2022年  |

|                               |
|-------------------------------|
| 1. 発表者名<br>落合理                |
| 2. 発表標題<br>ArtinのL関数のp進類似について |
| 3. 学会等名<br>大阪市立大学談話会（招待講演）    |
| 4. 発表年<br>2021年               |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>落合理   |
| 2. 発表標題<br>Congruence of automorphic representations and Special values of adjoint L-functions for $\mathrm{GSp}(4)$ |
| 3. 学会等名<br>研究集会 ``第7回京都保型形式研究集会" (June 19 - June 21) (オンライン研究集会) (招待講演)  |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai  |
| 2. 発表標題<br>Endoscopic congruences and adjoint L-values for $\mathrm{GSp}(4)$         |
| 3. 学会等名<br>Recent advances in the arithmetic of Galois representations (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai  |
| 2. 発表標題<br>Congruence of modular forms and Special values of adjoint L-functions |
| 3. 学会等名<br>Number theory colloquium at Indian Statistical Institute (招待講演)       |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>落合理  |
| 2. 発表標題<br>$\mathrm{GSp}(4)$ の内視的な保型表現の $\mathrm{mod} \ p$ 合同と adjoint L 関数の特殊値 |
| 3. 学会等名<br>2019大分佐賀整数論研究集会 (招待講演)   |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai   |
| 2. 発表標題<br>Iwasawa Main Conjecture for Galois deformation spaces and glueing of Euler systems I, II |
| 3. 学会等名<br>CMC special weeks on number theory (招待講演) (国際学会)   |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai   |
| 2. 発表標題<br>Congruences between endoscopic representations and non-endoscopic representations of $\mathrm{GSp}(4)$ modulo adjoint L-values |
| 3. 学会等名<br>Workshop on the congruence ideals and p-adic L-functions (招待講演) (国際学会)   |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai  |
| 2. 発表標題<br>Endoscopic congruences and adjoint L-values for $\mathrm{GSp}(4)$ |
| 3. 学会等名<br>保型形式とL関数の解析的, 幾何的, p進的研究 (招待講演) (国際学会)                            |
| 4. 発表年<br>2020年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai   |
| 2. 発表標題<br>Congruences endoscopiques et fonction L adjointe pour $\mathrm{GSp}(4)$    |
| 3. 学会等名<br>Seminaire: Groupes Reductifs et Formes Automorphes (University of Paris 7) |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Tadashgi Ochiai  |
| 2. 発表標題<br>Congruences of modular forms and special values of L-functions |
| 3. 学会等名<br>Algebra and Number Theory Seminar (University College Dublin)  |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai   |
| 2. 発表標題<br>Overview of p-adic L-function  |
| 3. 学会等名<br>Special Values of Automorphic L-functions and Associated p-adic L-Functions (Casa Mathematica Oxaca) |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai   |
| 2. 発表標題<br>Endoscopic congruences modulo adjoint L-values for $\mathrm{GSp}(4)$                           |
| 3. 学会等名<br>Workshop on L-functions, Langlands functoriality and Trace formula, including relative aspects |
| 4. 発表年<br>2018年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai  |
| 2. 発表標題<br>La conjecture principale d'Iwasawa pour les familles p-adiques de formes modulaires |
| 3. 学会等名<br>Seminaire de la theorie des nombres (Universite de Caen)                            |
| 4. 発表年<br>2018年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Tadashi Ochiai  |
| 2. 発表標題<br>La conjecture principale d'Iwasawa pour les familles de formes modulaires p-adiques |
| 3. 学会等名<br>Seminaire de la theorie des nombres (Universite de Bordeaux)                        |
| 4. 発表年<br>2018年  |

〔図書〕 計2件

|                   |                 |
|-------------------|-----------------|
| 1. 著者名<br>落合理     | 4. 発行年<br>2020年 |
| 2. 出版社<br>日本評論社   | 5. 総ページ数<br>208 |
| 3. 書名<br>現代整数論の風景 |                 |

|   |                 |
|---|-----------------|
| 1. 著者名<br>Tadashi Ochiai  | 4. 発行年<br>2023年 |
| 2. 出版社<br>American Mathematical Society   | 5. 総ページ数<br>154 |
| 3. 書名<br>Iwasawa Theory and Its Perspective, Volume 1 (Mathematical Surveys and Monographs) |                 |

〔産業財産権〕

〔その他〕

|   |
|---|
| <p>研究活動およびその他の仕事<br/> <a href="http://www.math.titech.ac.jp/~ochiai/work.html">http://www.math.titech.ac.jp/~ochiai/work.html</a><br/> 研究活動およびその他の仕事<br/> <a href="http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html">http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html</a><br/> 研究活動およびその他の仕事<br/> <a href="http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html">http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html</a><br/> 研究活動およびその他の仕事<br/> <a href="http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html">http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html</a><br/> 研究活動およびその他の仕事<br/> <a href="http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html">http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ochiai/work.html</a></p> |
|---|

## 6. 研究組織

|  | 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

|  |                    |
|--|--------------------|
| 国際研究集会<br>Special Values of Automorphic L-functions and Associated p-adic L-Functions (Casa Mathematica Oxaca) | 開催年<br>2018年～2018年 |
| 国際研究集会<br>Special Values of L-functions (A conference in memory of Claus-Gunter schmidt) (                     | 開催年<br>2023年～2023年 |

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|