

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2018～2022

課題番号：18K18712

研究課題名（和文）j 関数の実二次数値の数論

研究課題名（英文）Arithmetic of values at real quadratics of the j-function

研究代表者

金子 昌信（Kaneko, Masanobu）

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：70202017

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,900,000 円

研究成果の概要（和文）：素数のマイナスの平方根から定まる、虚二次体と呼ばれる数の集合に対して、類数という重要で神秘的な量を考える。その類数を、その素数の平方根である実二次無理数を、連分数展開という数の表現方法で表すことで得られる量で書く、見事な公式が半世紀ほど前から知られている。この公式を、言わば残り半分の素数に対して一般化した。また、テータ関数という、モジュラー形式の一種について、その値の代数独立性、超越性、すなわち多項式関係の有無、に関しても幾ばくかの結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

類数は整数論において古くから研究され、かつ未だに謎の多い重要な対象である。その中でも基本的な虚二次体の類数について、それを実二次無理数の連分数展開から計算するという意外な公式の、未だ知られていなかった場合を明らかにした意義は大きい。またその手法は、類似の公式を望むだけ生み出せるようなもので、応用も広い。整数論は暗号などで社会的にも大きな役割を果たしつつあるが、虚二次体の類数は直接的には超特異楕円曲線と関係が深く、暗号研究にも直接繋がるものである。

研究成果の概要（英文）：For the class number of an imaginary quadratic field generated by the square root of negative of a prime, there is a beautiful formula expressing it in terms of the continued fraction expansion of the square root of that prime. We generalized this formula to the case of “remaining” half of the primes.

We also obtained some results on the algebraic independence and transcendence of the values of the theta function, a kind of modular form.

研究分野：整数論

キーワード：虚二次体の類数 実二次無理数の連分数展開 楕円モジュラー j-関数 テータ関数

1. 研究開始当初の背景

本研究の申請時に、調書に書いた背景は次の通りであった。

「1900年にヒルベルトが提出した23の問題のうちの第12番目に、「代数体のアーベル拡大がその特殊値で生成されるような、適当な解析関数を見いだすこと」という問題がある。ヒルベルトはこの問題を「数および関数の、すべての理論の中で最も深く最も重要なものの一つ」と見なしたが、現在でもその重要性和興味は失われていない。基礎となる代数体有理数体、および虚二次体の場合は、主としてクロネッカーの研究により、それぞれ指数関数、および楕円関数ないし楕円モジュラー関数を取るべき関数であることが知られていた。特に虚二次体の場合の予想ないし理論は「クロネッカーの青春の夢」として知られる。

ヒルベルトが問題を提出してから1世紀以上経つが、有理数体、虚二次体の次に考えられるべき一番身近な実二次体の場合に限っても、以来いくつもの試みや結果はあるものの、今なお解決にはほど遠いのが現状だと言ってよい。

本研究の大きな目標は、虚二次体の類体構成に決定的な役割を果たした楕円モジュラー j 関数を実二次体にも用いることにより、100年来の懸案である、実二次体上のアーベル拡大の構成問題に新風を吹き込もうというものである。そして更に野心的には、虚二次体の虚数乗法論と、実二次体の「実乗法論」に実質的な橋をかけてやろう、とも目論んでいる。」

ここに書かれた、「楕円モジュラー j 関数を実二次体にも用いる」というのは、具体的には、かつて研究代表者が定義した、楕円モジュラー j 関数の実二次点での「値」、それはある種のサイクル積分で定義されるものであるが、それを用いることによって問題に挑もうとしたものである。

当初の関連する、最近の研究として、デュークとイマモグルが、この「値」を適当に正規化して平均を取ったものの母関数が、モックモジュラー形式になっている、しかも楕円モジュラー j 関数の虚二次点での値の平均の母関数と表裏一体のものになっている、という発見をしていた。これは我々の野心的な目標に対して一つの理論的、あるいは精神的サポートを与えるもののように思われ、また、虚二次体と実二次体を切り離して考えない方がよいということを示唆していた。本研究の中で第12問題を解決していくことは難しいであろうが、周辺の手の届きそうなところをまず見だし、そこからの進展を目指した。

2. 研究の目的

実二次体の類体構成に楕円モジュラー j 関数がどのような役割を果たすことができるかを探ること、とくに以前定義した j 関数の実二次点での「値」からどのようにして代数的量を取り出すかを探ること。また、虚二次体の数論にも目を配り、古典的な結果であっても常に新しい見方があるのではないかと探索を続けること。

それに関連して、デュークらの仕事に現れた、モックモジュラー形式や調和マース形式、あるいはジスの研究から示唆される結び目不変量との関連など、様々な対象との結びつきを明らかにしていくこと。

3. 研究の方法

ザギエやデュークら専門家との議論も行いながら、モジュラー形式、さまざまなタイプの保型形式、 L 関数などを道具として、代数的整数論からの手法のみならず、解析数論の手法も取り入れつつ、広い観点からのアプローチを試みる。

また、計算機による数値実験も多用し、新たな現象の発見にも努める。

4. 研究成果

類体構成そのものについてはさしたる進展を見ることができなかった。代数体の類体とは、その代数体のアーベル拡大のことで、その拡大次数が類数と呼ばれる量と密接に関連する。もっとも基本的な代数体である、虚二次体の類数について、それを実二次無理数の連分数展開から定まる量で表す、ヒルツェブルフーザギエの公式と呼ばれる美しい公式の、これまで知られていなかった場合、正確に言うと、これまでは4で割って3余る素数のマイナスの平方根から定まる虚二次体について知られていたのを、4で割って1余る素数の場合の公式、それはかつて数値実験から予想したものであったが、その証明の細部を完成し、水野との共著論文として発表した。この証明の方法は、種の指標に付随する L 関数を一般的に明示的に計算するというもので、ここで述べ

た公式以外にも類似の公式をいくらでも生み出せるような優れた方法である．またこの明示的な L 関数の公式は他にも応用があって、今後の研究課題の源となり得るものである．

他には、古典的なヤコビのテータ関数の値について、その代数的独立性や超越性に関する結果を立谷らと共同で得た．フィボナッチ数列やリュカ数列と言った、数学の広い範囲で現れる数列に関連したある種の無限積（これまでの研究で扱われていたのはもっぱら無限和であって、無限積を扱ったのは真新しい）が、このテータ関数で書き表せることが分かり、一般論を展開した上でこれらに応用することができた．エータ関数の積たちの中に成り立つ関係を巧妙に使う証明も興味深いもので、他の似たような無限積にも応用できないかを探っているところである．

実二次体のキャリバーという量については以前より研究を行ってきたが、この研究を三次体に拡張、大学院生を指導して、キャリバーが 1 の三次体をすべて決定することができた．これは現在論文としてまとめるよう指導中である．実二次体のキャリバーはある意味で虚二次体の類数の実二次類似と見なすことができ、広く研究されている対象ではないものの、まだまだ発掘していく余地のある対象であると思っている．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Masanobu Kaneko, Ce. Xu and Shuji Yamamoto	4. 巻 580
2. 論文標題 A generalized regularization theorem and Kawashima's relation for multiple zeta values	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 247-263
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2021.04.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Duverney Daniel, Elsner Carsten, Kaneko Masanobu, Tachiya Yohei	4. 巻 8
2. 論文標題 A criterion of algebraic independence of values of modular functions and an application to infinite products involving Fibonacci and Lucas numbers	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 Paper No. 31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40993-022-00328-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Masanobu Kaneko, Yoshinori Mizuno	4. 巻 102-1
2. 論文標題 Genus character L-functions of quadratic orders and class numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 69-98
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/jlms.12313	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 15件/うち国際学会 9件）

1. 発表者名 金子昌信
2. 発表標題 虚2次体の類数をめぐる2,3の話題
3. 学会等名 愛知数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masanobu Kaneko
2. 発表標題 On some formulas for quadratic class numbers
3. 学会等名 Number Theory in Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masanobu Kaneko
2. 発表標題 Multiple L-values of conductor four, Entringer numbers, and modular forms,
3. 学会等名 Number Theory Seminar, Universita degli studi Roma Tre (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 金子昌信
2. 発表標題 虚2次体の類数をめぐる2,3の話題
3. 学会等名 愛知数論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masanobu Kaneko
2. 発表標題 On some formulas for quadratic class numbers
3. 学会等名 Number Theory in Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 金子昌信
2. 発表標題 レベル2有限多重ゼータ値について
3. 学会等名 九州代数的整数論2021夏（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 金子昌信
2. 発表標題 Multiple L-values of conductor 4, Entringer numbers, and period polynomials
3. 学会等名 第 16 回多重ゼータ研究集会& 第 58 回関西多重ゼータ研究会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masanobu Kaneko
2. 発表標題 Genus character L-functions of quadratic orders and class number formulas
3. 学会等名 NCTS Seminar on Number Theory（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 金子昌信
2. 発表標題 Caliber
3. 学会等名 香川セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masanobu Kaneko
2. 発表標題 On a variant of multiple zeta values of level two
3. 学会等名 Multiple zeta values and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masanobu Kaneko
2. 発表標題 Genus character L-functions of quadratic orders and class numbers (joint with Y.Mizuno)
3. 学会等名 Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 金子昌信
2. 発表標題 楢円モジュラー関数の実二次点における「値」について
3. 学会等名 紀尾井町数理セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masanobu Kaneko
2. 発表標題 On the "value" of the elliptic modular function at real quadratics
3. 学会等名 New developments in the theory of modular forms over function fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masanobu Kaneko
2. 発表標題 Genus character L-functions of quadratic orders and class number formulas
3. 学会等名 Indo-Japan conference on number theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masanobu Kaneko
2. 発表標題 Genus character L-functions of quadratic orders and class number formulas
3. 学会等名 Hawaii Number Theory 2019 (HINT) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------