

令和 4 年 6 月 15 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2018～2021

課題番号：18K18714

研究課題名（和文）応用特異点論の情報科学および工学的デザインにおける展開

研究課題名（英文）Applied Singularity Theory in Information Science and Structural Design

研究代表者

大本 亨（Ohmoto, Toru）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：20264400

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,000,000円

研究成果の概要（和文）：ルジャンドル特異点論（非凸関数のルジャンドル変換の特異性解析）に基づいて、《情報幾何学》で重要な双対平坦構造の理論（甘利・長岡理論）の一般化を行った。これは、深層学習等における特異モデルに対する理論的アプローチの萌芽的研究につながる。また、《構造デザインにおける応用幾何学》において特異点論的アプローチを開拓した。これは、ダルブー・ヴィルチンスキ以降、100年程忘れられていた古典的射影微分幾何における局所理論の今日的な復興と位置づけられるだろう。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題は、機械学習分野あるいはアーキテクチャル幾何など、数学の外の世界に向けた応用特異点論の新しい萌芽的研究である。応用分野の諸課題に《特異点》は本質的に現れるにも関わらず、本格的な研究は未開拓であった。その端緒をひらく本研究の学術的意義は大きい。また、大学院生や若手研究者を積極的に共同研究に巻き込むことで、次世代に向けた新しい学際的研究の雛形を提示するものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：Based on Legendre singularity theory, we generalize the theory of dual flat structures (Amari-Nagaoka) which takes an important role in information geometry. This leads to a new theoretical approach to singular models in Deep Learning. We also provide a singularity-theoretic approach to applied geometry in structural design. This is a new development of local theory in classical projective differential geometry which has long been forgotten for hundred years after Darboux and Wilczynski.

研究分野：幾何学

キーワード：特異点論 ルジャンドル変換 接触幾何学 情報幾何学 応用幾何学 Line Geometry

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

70年代に興ったR.トムによる初等カタストロフ理論は、自然科学・社会科学・工学等に対する数学的方法において純粋数学からの斬新なパラダイムシフトを提案したものであり、賛否両論あったもののそのインパクトは大きかった。連続な数理モデルを設定する以上、内在的エネルギーや観測量等に特異点は必然的に現れ、かつパラメータに伴う退化現象等が系の記述に決定的な役割を持つ—この意味において、関数・写像の特異点の重要性を説くトムのパラダイム自体は今日でも色あせることはない。むしろ系特有の幾何的制約に対して適切な特異点分類が考案され適用されるべきである。この文脈から、北大特異点論グループの20年近くの実績を踏まえて、数学の外の世界に向けた応用特異点論の展開を本格化すべきと考える。そこで本研究課題では、広く自然科学・工学の諸分野で用いられるアファイン・射影微分幾何的手法において特異点解析を導入し、応用特異点論の萌芽的なアプローチを模索する。

2. 研究の目的

上述の背景に基づいて、本研究課題では、統計科学・情報科学等の新興領域の新しいニーズに対して、今まで検討されていなかった「応用特異点論的アプローチ」を提案する。

[1] 情報幾何学への特異点論的アプローチ：情報幾何学は、統計科学、機械学習、凸解析、情報理論などの幅広い数理工学・数理科学分野における微分幾何学的手法の理論的支柱であって、多くの研究者を巻き込み発展している大きな学際分野である。とりわけ、双対平坦空間（甘利・長岡理論）は、情報幾何学におけるハイライトと呼ぶべき重要な幾何学的構造であり、これはアファイン微分幾何学におけるヘッセ多様体と等価のものである。本研究課題では、ラグランジュ・ルジャンドル特異点論を本格的に情報幾何学に導入し、幅広い数理工学分野における特異点解析手法の開拓を目指す。

[2] 応用幾何学への特異点論的アプローチ：アーキテクチャル幾何（Architectural Geometry）とは、建築・工業製品・CAD・工芸等での「構造デザインにおける新しい応用幾何学」であって、線織面等の微分直線幾何（Line Geometry）および多面体の計算幾何学がその基礎にある。既存研究を見るとそこかしこに“特異点”が現れているにも関わらず、全く未開拓である。そこで本課題では、線織面や可展開面に関する特異点研究の延長上に、本格的にアーキテクチャル幾何への特異点論的手法の実装を図り、これを古典的微分幾何における局所理論（ダルブー・ヴィルチンスキ）の今日的な復興を図る。一方、計算幾何学・離散幾何学の側面では、曲面上の波面の伝播とコースティクスの研究の区分的線形（PL）類似を探索する。

3. 研究の方法

[1] 双対平坦構造の本質は、凸ポテンシャルおよびそのルジャンドル変換である双対凸ポテンシャルのペアである。しかし、実際例として深層学習等のアーキテクチャでは、非凸ポテンシャルが普通に出てくるので、そのままでは双対平坦理論は適用できない。一方、ルジャンドル特異点論は、非凸関数のルジャンドル変換の特異性を解析するための数学理論に他ならない。そこで、非凸ポテンシャルを許容するように、ルジャンドル特異点論に立脚した双対平坦空間理論の拡張を行う。その際、「特異波面のリーマン幾何学」（佐治・梅原・山田理論）および「非凸最適化と変分問題」（エクラン（Ekeland）, 1976）を雛形として、そのアファイン微分幾何版（情報幾何版）としての理論構築を目指す。統計多様体の理論において、コントラスト関数の理論や種々のテンソル解析において特異性を導入し、新しい理論に向けた土壌を整備する。

[2] CAD等のヴィジョン理論において、曲面の放物曲線（漸近直線が重複する点の軌跡）やフレクノードル曲線（漸近直線が曲面と退化した接触度を持つ双曲点の軌跡）は、曲面の“曲がり具合の見え方”を評価する重要な射影幾何的不変量である。我々の先行研究において、曲面の2パラメータ族に現れる放物曲線およびフレクノードル曲線の分岐問題（マンフォードが提出した課題）を解決していたが、同じ手法を線織面ならびに可展開面の局所的分類に適用する。同種の問題として、微分直線幾何（Line Geometry）における線織面、可

展開面，線叢などに現れる特異点について，いわゆる幾何的代数 (Geometric Algebra)，すなわち合同変換群のリー環であるクリフォード代数を用いた新しい特異点解析手法を確立する．また，計算幾何学の側面として，多面体上における波面の伝播のジェネリックな分類を行い，即時的に波面伝播とカットローカスの描画を出力するアルゴリズムについて検討する．

4. 研究成果

[1] アファイン微分幾何的ルジャンドル多様体論として，概ヘッセ多様体理論の基礎部分を築いた (北大院生・中島直道氏との共同研究)．我々の新しい理論は双対平坦構造の一般化であって，リーマン計量 (ヘッセ計量) の退化を許容するが，対称 3 次テンソル (一般化された甘利・チェンソフ-テンソル) は全空間で定義される．特に，凸ポテンシャルの代わりに局所的に定義される (ルジャンドル多様体の) 生成母関数が担い，その 2 次および 3 次微分が退化計量ならびに 3 次テンソルを生み出すものになっていて，解析力学の機構にぴったりと合った調和のとれた理論構成になっている．統計多様体 (M, h, C) とは疑リーマン計量 h と対称 3 次テンソル C が備わった多様体 M のことであって，コントラスト関数 $D: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ との対応があるが，この対応において，特別な統計多様体のクラスである双対平坦空間はブレグマン・ダイバージェンス (標準コントラスト関数) と対応する．この対応は h が単に対称 2 次テンソル (退化を許容する計量) であっても，弱コントラスト関数と対応し，我々の概ヘッセ多様体は標準弱コントラスト関数と対応するものになっている．応用面で重要な点として，統計的推論等で重要な「拡張ピタゴラスの定理」を概ヘッセ多様体において確立し，深層学習等の特異モデルに対する理論的アプローチに向けた基礎的研究を進めた．また，本話題に関連して，ルジャンドル特異点論の第 1 人者である研究協力者の石川剛郎教授 (北大) はフロンタル曲面の特異点の研究，古畑仁教授 (北大) は統計部分多様体論の研究を進めた．

[2] $\mathbb{R}^3(\subset \mathbb{R}P^3)$ 内の滑らかな曲面の局所射影的変換による分類を考える．すなわち，原点および xy 平面を保存する $PGL(4)$ による変換で移り合うモンジュ形式 $z = f(x, y)$ のジェットを考える．我々独自の手法を線織面ならびに可展開面に適用し，余次元 3 までを分類し $f(x, y)$ のテイラー展開の標準形を得た (加葉田雄太郎氏 (長崎大) とデオリンド・シウバ氏 (サンタカタリーナ州立大学, ブラジル) との共同研究)．例えば，現代建築等における双曲的構造には線織面の構造がよく用いられるが，そうした曲面上の幾何的特徴点の分類につながる (図 1)．

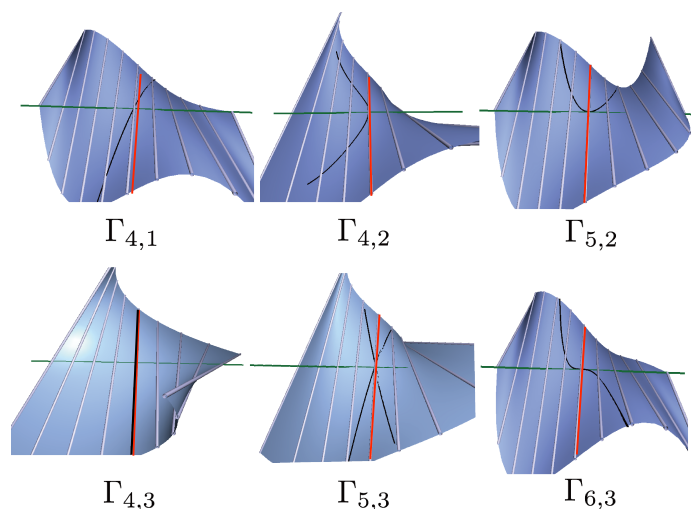


図 1 : フレクノードル点における非トーサル線織面の射影的 분류

他に，ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の合同変換群のリー環への写像芽を考察し，特異点論の \mathcal{A} -分類理論を適用することにより， \mathbb{R}^3 内の特異線織面および可展開面の局所分類を完成させた (北大院生・田中純貴氏との共

同研究). このようなリー環はいわゆるクリフォード代数であり (数理工学分野では幾何的代数 (Geometric Algebra) と呼ばれる), 別のクライン幾何に対応するクリフォード代数に適用することで, 同種の “非ユークリッド的 Line Geometry” における特異点解析が考えられる.

また, 計算幾何学の側面として, アーノルドらによる滑らかな曲面上の波面の 1 パラメータ分岐 (ペレストロイカ) の PL 版 (区分的線形版) として, 多面体上における波面の伝播のジェネリックな分類を行った. これに基づき, 即時的に波面伝播とカットローカスおよび展開図の描画を出力するアルゴリズムを提案し, これを計算機上にも実装し実験を多数行った (北大院生・箱入数磨氏との共同研究).

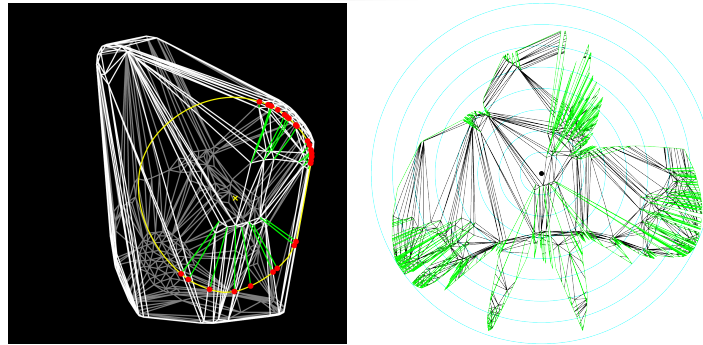
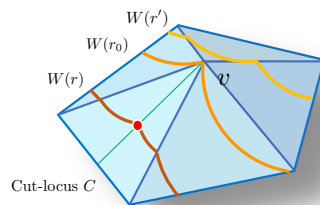


図 2 : 凸多面体の波面伝播・カットローカス・展開図

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計26件（うち査読付論文 26件／うち国際共著 6件／うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 G. Ishikawa and S. Janeczko	4. 巻 24
2. 論文標題 Symplectic singularities of differentiable mappings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Surveys in Differential Geometry	6. 最初と最後の頁 117-172
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/SDG.2019.v24.n1.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 G. Ishikawa	4. 巻 255
2. 論文標題 Normal and tangent maps to frontals	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 664-677
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10958-021-05403-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Furuhashi, J. Inoguchi, S. Kobayashi	4. 巻 4
2. 論文標題 A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Information Geometry	6. 最初と最後の頁 177-188
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s41884-020-00037-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Satoh, H. Furuhashi, I. Hasegawa, T. Nakane, Y. Okuyama, K. Sato, M. Hasan Shahid, A. Naaz Siddiqui	4. 巻 4
2. 論文標題 Statistical submanifolds from a viewpoint of the Euler inequality	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Information Geometry	6. 最初と最後の頁 189-213
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s41884-020-00032-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Nakajima and T. Ohmoto	4. 巻 4
2. 論文標題 The dually flat structure for singular models	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Information Geometry, Springer	6. 最初と最後の頁 31-64
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41884-021-00044-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Goo Ishikawa, Stanislaw Janeczko,	4. 巻 16
2. 論文標題 Singular mappings and their zero-forms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 1643-4657
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Goo Ishikawa	4. 巻 21
2. 論文標題 Recognition Problem of Frontal Singularities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 149-166
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 G Ishikawa, T. Yamashita	4. 巻 71
2. 論文標題 Leibniz complexity of Nash functions on differentiations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 709--726
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jms/76877687	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 G. Ishikawa	4. 巻 60
2. 論文標題 Cofrontals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 461--478
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 G. Ishikawa	4. 巻 21
2. 論文標題 Recognition Problem of Frontal Singularities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 149--166
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2020.21i	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A. Honda, K. Saji	4. 巻 42
2. 論文標題 Geometric invariants of 5/2-cuspidal edges	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kodai Math. J.	6. 最初と最後の頁 496--525
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 L. Martins, K. Saji, K. Teramoto	4. 巻 13
2. 論文標題 Singularities of a surface given by Kenmotsu-type formula in Euclidean three-space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Sao Paulo J. Math. Sci.	6. 最初と最後の頁 663--677
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/2Fs40863-019-00138-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J. Tanaka, To. Ohmoto	4. 巻 21
2. 論文標題 Geometric algebra and singularities of ruled and developable surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 270--288
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2020.21o	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 S. Izumiya, N. Takeuchi	4. 巻 39
2. 論文標題 Evoltooids and pedaloids of plane curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Note di Matematica	6. 最初と最後の頁 13--23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1285/i15900932v39n2p13	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Y. Jiang, S. Izumiya	4. 巻 45
2. 論文標題 Lightcone dualities for submanifolds in the sphere	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Houston Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 175--199
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 S. Izumiya, M. Takahashi	4. 巻 21
2. 論文標題 On families of Lagrangian submanifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 188--207
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2020.21j	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 H. Teramoto, A. Tsuchida, K. Kondo, S. Izumiya, M. Toda, T. Komatsuzaki	4. 巻 21
2. 論文標題 Application of Singularity Theory to Bifurcation of Band Structures in Crystals	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 289 - 302
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2020.21p	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 S. Izumiya	4. 巻 22
2. 論文標題 Caustics and Maxwell sets of world sheets in anti-de Sitter space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Theoretical and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 759 ~ 802
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/ATMP.2018.v22.n3.a5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. Takahashi	4. 巻 78
2. 論文標題 Evolutes of curves in the Lorentz-Minkowski plane	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 313-330
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Izumiya Shyuichi	4. 巻 78
2. 論文標題 The theory of graph-like Legendrian unfoldings : Equivalence relations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 107-162
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Izumiya, Y. Wang	4. 巻 109
2. 論文標題 Duals of timelike Sabban curves in de Sitter n -space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00022-018-0438-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 G. Ishikawa, T. Yamashita	4. 巻 234
2. 論文標題 Singularities of tangent surfaces to directed curves	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 198-208
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.11.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 G. Ishikawa	4. 巻 78
2. 論文標題 Singularities of frontals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 55-106
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Honda, M. Koiso and K. Saji	4. 巻 47
2. 論文標題 Fold singularities on spacelike CMC surfaces in Lorentz-Minkowski space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Math. J.	6. 最初と最後の頁 245-267
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saji Kentaro	4. 巻 29
2. 論文標題 Normal form of the swallowtail and its applications	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1850046-1850046
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X18500465	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Oset Sinha Raul, Saji Kentaro	4. 巻 31
2. 論文標題 On the geometry of folded cuspidal edges	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Revista Matematica Complutense	6. 最初と最後の頁 627-650
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13163-018-0257-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計18件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 T. Ohmoto
2. 発表標題 Persistent characteristic classes and Riemann-Roch
3. 学会等名 Asia Pacific Seminar on Applied Topology and Geometry (Online)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中島直道
2. 発表標題 アファイン座標系における e/m-波面の局所的標準形
3. 学会等名 第68回幾何学シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 T. Ohmoto
2. 発表標題 Applied Singularity Theory -- an updated new catastrophe theory
3. 学会等名 International Symposium on Big-Data, Cybersecurity and IoT (Online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大本 亨・中島 直道
2. 発表標題 Information Geometry from Singularity Theory Viewpoint
3. 学会等名 研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」(オンライン)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大本 亨・中島 直道
2. 発表標題 情報幾何への特異点論的アプローチ
3. 学会等名 ワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺」(オンライン) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 N. Nakajima and T. Ohmoto
2. 発表標題 Information Geometry from Singularity Theory Viewpoint
3. 学会等名 16th International Workshop on Real and Complex Singularities (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Goo Ishikawa
2. 発表標題 Singularities of parallels to tangent maps of frontals
3. 学会等名 16th International Workshop on Real and Complex Singularities (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Goo Ishikawa
2. 発表標題 Tangential and Normal Maps to Frontals
3. 学会等名 The International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems 2020 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 S. Izumiya
2. 発表標題 On $K[S_0(p)]$ -equivalence among map germs
3. 学会等名 6th International Workshop on Singularities in Generic Geometry and its Applications (Valencia VI) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 S. Izumiya
2. 発表標題 Singularities of Cauchy horizons in globally hyperbolic space-times
3. 学会等名 Singularity Theory and its Applications to Differential Equations and Differential Geometry (Moscow) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 G. Ishikawa
2. 発表標題 Several problems on singularities of implicit differential equations and related topics
3. 学会等名 Singularity Theory and its Applications to Differential Equations and Differential Geometry (Moscow) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Saji
2. 発表標題 Geometric invariants of lightlike points of surfaces in 3-dimensional Lorentzian manifolds
3. 学会等名 6th International Workshop on Singularities in Generic Geometry and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Saji
2. 発表標題 Contact-like relation of vector fields and functions and its applications
3. 学会等名 Hyperplane arrangements and Japanese Australian workshop on Real and Complex Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 泉屋周一
2. 発表標題 滑らかな写像芽の間の幾何学的同値関係 — Thom-Mather理論へのオマージュ
3. 学会等名 「日本数学会年会」総合講演(東京工業大学)(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Goo Ishikawa, Motoki Oyama,
2. 発表標題 Topology of complements to real affine space line arrangements
3. 学会等名 Western Joint Sectional Meeting, American Mathematical Society. Hawaii, USA. (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 G. Ishikawa
2. 発表標題 Topics on frontal singularities
3. 学会等名 15th International Workshop on Real and Complex Singularities, Sao Carlos, Brazil (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 H. Furuhata
2. 発表標題 Statistical submanifolds and warped product spaces
3. 学会等名 Information Geometry and Affine Differential Geometry III (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Saji
2. 発表標題 $S^0(3)$ normal forms and differential geometric invariants of singular surfaces
3. 学会等名 15th International Workshop on Real and Complex Singularities, Sao Carlos, Brazil (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	泉屋 周一 (Izumiya Shyuichi)		
研究協力者	石川 剛郎 (Ishikawa Goo)		
研究協力者	古畑 仁 (Furuhata Hitoshi)		
研究協力者	中島 直道 (Nakajima Naomichi)		
研究協力者	舘入 数磨 (Tateiri Kazuma)		
研究協力者	加葉田 雄太朗 (Kabata Yutaro)		
研究協力者	ジョルジュ デオリンド シウバ (Jorge-Luiz Deolindo-Silva)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	田中 純貴 (Tanaka Junki)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 14th Algebra-Analysis-Geometry Seminar, Kagoshima	開催年 2019年～2019年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関