様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月　９ 日現在

機関番号：１１３０１

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2018～2022

課題番号：１８Ｋ１８７１５

研究課題名（和文）非整数階微分と非線形構造が共存する発展方程式の研究

研究課題名（英文）Evolution equations with the coexistence of fractional derivatives and nonlinear structures

研究代表者

赤木　剛朗（Akagi, Goro）

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：６０３６０２０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題で得られた研究成果は大きく以下の2点に集約される。
(1) ヒルベルト空間に於ける非整数階（時間）微分を含む勾配流の理論を構築した。この結果は汎函数に凸性を仮定するいわゆる Brezis-Komura 理論と呼ばれる古典的な勾配流理論の非整数階微分版に相当するもので、それまで解の存在や一意性などの基本事項が未解決であった非整数階時間微分を含む偏微分方程式の研究に基盤を与えるものである。
(2) 領域上に制限された分数冪ラプラシアンと非実解析的ポテンシャルに対する勾配不等式を証明し、さらにそれを用いることで分数冪 Cahn-Hilliard 方程式の解が定常解へ収束することを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
拡散現象や相転移現象のような不可逆過程については、前世紀に物理学の古典論が確立し、その後、様々な現象の解析に適用されてきた。しかしその過程に於いて、古典論の予測から大きく逸脱する不可逆現象が多々発見されるようになり、古典論の見直しに対する強い動機をもたらした。ここで扱う非整数階微分や非線形拡散は古典論の修正に効果的であり、多くの注目を集めている。本研究課題の研究成果はそのような新しい構造を伴う数学的対象に対して、十分な汎用性と応用性を兼ね備えた理論を与え、この分野の研究に於いて１つの基盤となるものと考える。数学的基盤が整備されることで応用研究の土台が整い、広範な分野への波及効果が期待される。

研究成果の概要（英文）：The main results of this research project consist of the following:
(1) We established a theory for fractional (in time) gradient flows in Hilbert spaces. This result extends the so-called Brezis-Komura theory, which is concerned with classical gradient flows and has been used to analyze various nonlinear partial differential equations, to fractional evolution equations and can provide a basic frame for studying time-fractional partial differential equations, whose well-posedness (e.g., existence and uniqueness of solutions) has been open for long time.
(2) We proved a gradient inequality for fractional Laplacians restricted on domains and non-analytic potentials and applied it to prove the convergence of solutions to equilibria for the fractional Cahn-Hilliard systems.

研究分野：発展方程式，関数解析

キーワード：非整数階微分　非線形問題　発展方程式　異常拡散　多重スケール構造

１．研究開始当初の背景

拡散現象や相転移現象のような不可逆過程については，前世紀に物理学の古典論が確立し，その後，様々な現象の解析に適用されてきた．しかしその過程に於いて，古典論の予測から大きく逸脱する不可逆現象が多々発見されるようになり，古典論の見直しに対する強い動機をもたらした．例えば拡散現象に対する古典論は，拡散する粒子の平均 2 乗変位が時間 に比例するという性質を導く（**正常拡散**）．一方，土壌や砂岩などの不均質な媒質中にある粒子群の拡散や磁場中のプラズマの拡散を観測すると，正常拡散とは大きく異なる様相を呈することが知られている．それらは**異常拡散**と呼ばれ，それを記述することのできる理論が模索されてきた．近年，媒質の多重スケール構造に由来する異常拡散の記述に，非整数回微分と呼ばれる微分の一般化概念を用いた拡散型の線形偏微分方程式が有効であることが知られるようになった．これは，媒質の微細構造が粒子の運動に強い影響をもたらし，巨視的スケールでは粒子が非古典的に拡散しているように見えることに由来する．一方，異常拡散は媒質の多重スケール構造のみによって引き起こされるわけではなく，現象が本質的に非線形性を有している場合も多く存在する．特に拡散係数 D が拡散する粒子の分布密度に依存して変化するモデルは**非線形拡散**と呼ばれ，多孔質媒体中の気体拡散，プラズマの特異拡散の記述に用いられている．しかし，両者が共存する異常拡散モデルを考えることは自然な流れであるが，その数学的な研究はほとんど見当たらない．これは，非整数回微分に対して，ラプラス変換などの線形解析の手法が有効である一方，変分法や関数解析などに基づく非線形解析の手法とはうまく適合できていない点が原因となっている．

２．研究の目的

本研究では，**異常拡散を記述する数理モデルを包括的に扱うために，非整数回微分と非線形構造が共存した発展方程式に対する理論の構築（解の存在，一意性，定性的・定量的性質や長時間挙動など漸近挙動，定常解の安定性解析の分析など），及びそれらの解析の基礎となる数学的手法の確立**を目的とする．

３．研究の方法

連続時間ランダムウォークでは，粒子の跳躍間隔と跳躍距離を連続値とし，それぞれをある連続確率分布に従って選ぶことでランダムウォークする粒子群を扱う．特にそれぞれの確率分布をある冪型分布とレヴィ分布とした場合，粒子の分布密度関数が満たす（線形の）方程式はリーマン・リウヴィル微分（以下，R-L 微分）や分数冪ラプラス作用素などの非整数階微分を含む．これに対して多孔質媒体方程式と同様に，拡散係数が粒子の分布密度に依存する効果を組み入れると，**非整数階微分と非線形構造が共存する拡散方程式**が得られる．一方，R-L 微分の取扱いにはラプラス変換がしばしば用いられるが，同変換は拡散項の非線形性と相性が悪く，ここで考える拡散方程式に対して近似解の構成など基本的な解析の方針すら立てられていない．また分数冪ラプラス作用素を含むフェーズフィールド方程式（例えば Cahn-Hilliard 系など）に関しては，その適切性は証明されているものの，解の漸近挙動，特に定常解への収束性を証明するための道具立てが整備されていなかったため，研究は停滞していた．ここでは以下のステップを踏むことで課題の解決を目指す．

ステップ１．R-L 微分を含む非線形発展方程式の解の構成

非整階時間微分を含む非線形発展方程式のクラスに対して，適切な正則性を有する初期値に対するコーシー問題の解の存在，一意性，解の初期値に対する連続依存性の証明に取り組み，その後の解析に必要となる基本的な理論的枠組みを確立させる．この場合でも既に，R-L 微分と非線形構造の共存がもたらす困難が生じていることに注意する．

ステップ２．より複雑な方程式の解析，解の定性的性質および漸近挙動の解析

ここでは解の定性的性質や漸近挙動の解析にむけて，ステップ 1 で開発した手法の改良および拡張を行う．また解の漸近挙動の分析では，発展方程式が生成する力学系の観点から幾つかの問題（解の長時間挙動や定常解の安定性解析，時間周期解の構造，安定性など）が考えられる．解の定常解への収束性を議論する上で，Łojasiewicz-Simon 型の勾配不等式は必須だが，特に（解析性を損なう非線形ポテンシャルを伴う）領域上に制限された分数冪ラプラス作用素を主要部に持つ（勾配型の）発展方程式に対しては，勾配不等式の証明に領域上の分数冪ラプラシアンに固有の困難が伴うため，結果が得られていなかった．

４．研究成果

本研究課題の成果として得られたものは以下のとおりである．

(1) ヒルベルト空間における凸型エネルギー汎関数に対する非整数階微分を含む勾配流型発展方程式の一般論構築

非整数階微分と非線形構造が共存する発展方程式に関する一般論の構築として，ヒルベルト空間上の凸エネルギー汎関数に対する勾配流の非整数階微分版に対する理論を構築した．このような一般化された勾配流は，地質学に現れる Richards 方程式，多孔質媒質方程式，p-Laplace 拡散方程式などの非線形拡散方程式の非整数階微分版をカバーする非常に一般性の高い枠組みである．非線形拡散方程式の非整数階微分版は近年，様々な分野で研究されるようになった．例えば Richards 方程式は土壌の特性を表すために非線形な拡散項を持っているが，拡散レートの理論値は正常拡散的である．一方，実験では異常拡散的になることが知られており，そのための修正として非整数階微分と非線形拡散が共存する time-fractional Richards 方程式が導入された．また Vergara-Zacher や Valdinoci らの研究グループが近年，非整数階時間微分を含む非線形拡散方程式の解の漸近挙動に関する結果を得ていた．一方，このような非線形拡散方程式の非整数階微分版に対しては基礎理論が存在せず，適切性や解の正則性などの基本的性質は常に仮定されていた．実際，Vergara-Zacher や Valdinoci らの論文では，解析の対象となるクラスの解の存在や一意性に関しては未解決であった．

本研究課題ではそのような基本的問題を一括して解決できるような抽象理論を構築している．ここで考える一般化された勾配流（非局所性を伴う勾配流）は Integro-differential evolution equations として既に 70-80 年代に欧米の研究グループを中心に盛んに研究されてきたが，いわゆる強解の存在は長らく未解決であり，いずれの結果も generalized solution（=ある特定の方法で構成された近似解の極限）の存在しか得られておらず，それが実際に考える方程式を満たしているかは，非線形項の極限の特定ができなかったため長らく未解決だった．ここでは近年，Zacher らが開発したエネルギー法と，新たに「下半連続凸汎関数に対する非整数階連鎖律」を開発することで強解の構成に成功した．また非整数階微分を伴う勾配流方程式の場合も，解の平滑化効果がある程度実現することを証明している．　さらにリプシッツ摂動理論を構築することで，非整数階時間微分を含む退化・特異

拡散方程式に加えて time-fractional Allen-Cahn 方程式もカバーできる抽象論の構築に成功した．

ここで得られた抽象論は，いわゆる **Brezis-Komura 理論の非整数階微分版**に対応するものである．既に結果は Israel Journal of Mathematics 誌から発表された（文献[1]参照）．この結果は当該分野に於いて解析の基盤をなすものであり，近年増加している非整数階時間微分を伴う非線形偏微分方程式の研究に於いて多くの応用が見込まれる．今後，さらなる応用が期待されるが，実際，既に海外の研究者によってここで得られた結果に基づく応用研究が多数始まっており，その波及効果が確認されている．

(2) 有界領域に於ける分数冪ラプラシアンを含む Cahn-Hilliard 系の解の漸近挙動の解析

有界領域に制限された分数冪ラプラシアンを含む Cahn-Hillard 系の研究は報告者らの結果（文献［2]）が先駆けとなるものであったが，解の漸近挙動の研究は未着手となっていた．その一因として C^2 級のポテンシャルと領域上に制限された分数冪ラプラシアンに対する Łojasiewicz-Simon 型の勾配不等式の証明が未解決であった点が挙げられる．ここでは同不等式を証明することで，定常解への収束を証明した．古典的なラプラス作用素の場合，Feireisl-Simondon によって同様の設定化で Łojasiewicz-Simon 型が証明されていた．また古典的な Cahn-Hillard 系に関しては，Hoffman-Rybka によってポテンシャルの解析性を仮定した上で，勾配不等式を用いた解の定常解への収束の証明が与えられていた（一方，解析性を仮定しない場合に関しては，古典的な Cahn-Hillard 系に関しても結果が見当たらない）．領域上の分数冪ラプラシアンの場合，定常解の境界正則性が著しく低下するため，Feireisl-Simondon による Łojasiewicz-Simon 型の勾配不等式の証明法が適用できなかったが，ここでは特殊なノルムを導入することでその点を克服している．さらにポテンシャル項の正則性や増大度に合わせて証明法を調整し，広いクラスの Cahn-Hilliard 系に適用できるような勾配不等式の導出に成功した．これらの結果は既に Journal of Functional Analysis 誌から発表されている（Schimperna 氏, Segatti 氏との共著論文．［3］参照）．

５．今後の展望について

本研究課題の実施によって幾つかの派生課題が生じ，それらは既に新たな科研費研究課題として取り組まれている．例えば（1）で述べた抽象論では汎函数の凸性が本質的な役割を担っていた．しかし解の有限時間爆発を伴うような偏微分方程式はそのようなクラスには含まれない．そのため（1）で得られた抽象論をより広いクラスの汎函数へ拡張することが派生課題として検討されている．半線形発展方程式の分野では非整数階時間微分を含むケースが Zacher や Gal-Warma らによって既に研究されている．この分野では方程式を積分方程式に書き換えることで，古典的な問題で用いた接近法がある程度可能となる（ただし半群性が失われていることに留意する）．一方，退化放物型方程式の場合，積分方程式を介した接近法が適用できないため，よりエネルギー的・変分的な手法に頼らざるを得ない．本研究ではまさにそのような手法の基礎を開拓しており，この派生課題に於いてもそれらが問題解決の糸口となることが期待される．それ以外にも非自励系の研究や摂動理論，解の漸近挙動の解析など問題は山積している．さらに具体的な偏微分方程式への応用，特に解の定量的な情報の抽出はこれからの課題と言える．特に非整数階時間微分を含む微分方程式では，その非局所性から解を求積することは困難であるばかりか，その漸近挙動を調べるだけでも困難を伴う．一方，近年，Vergara-Zacher らがいくつかの方向で成功を収めており，ここでもそれらを導入することで非整数階時間微分を含む退化放物型方

程式の解の漸近挙動に対する定量的解析を進めていく.

参考文献

[1] Goro Akagi, Fractional flows driven by subdifferentials in Hilbert spaces, Israel J. Math. **234** (2019), no.2, 809-862.

[2] Goro Akagi, Giulio Schimperna, Antonio Segatti, Fractional Cahn–Hilliard, Allen–Cahn and porous medium equations, J. Differential Equations **261** (2016), no.6, 2935-2985.

[3] Goro Akagi, Giulio Schimperna, Antonio Segatti, Convergence of solutions for the fractional Cahn–Hilliard system, J. Funct. Anal. **276** (2019), no.9, 2663-2715.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　4件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Akagi Goro、Melchionna Stefano、Stefanelli Ulisse	４．巻 21
２．論文標題 Correction to: Weighted Energy-Dissipation approach to doubly nonlinear problems on the half line	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of Evolution Equations	６．最初と最後の頁 5203～5207
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-021-00698-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Akagi Goro、Ishige Kazuhiro、Sato Ryuichi	４．巻 13
２．論文標題 The Cauchy problem for the Finsler heat equation	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Advances in Calculus of Variations	６．最初と最後の頁 257～278
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/acv-2017-0048	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Akagi Goro	４．巻 234
２．論文標題 Fractional flows driven by subdifferentials in Hilbert spaces	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Israel Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 809～862
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11856-019-1936-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Akagi Goro、Schimperna Giulio、Segatti Antonio	４．巻 276
２．論文標題 Convergence of solutions for the fractional Cahn-Hilliard system	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Journal of Functional Analysis	６．最初と最後の頁 2663～2715
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2019.01.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計7件（うち招待講演　4件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 赤木剛朗
2．発表標題 A framework for proving existence of local-energy solutions to doubly-nonlinear diffusion equations with growing initial data
3．学会等名 応用数学セミナー，東北大学大学院理学研究科数学専攻（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Rates of convergence to non-degenerate asymptotic profiles for fast diffusion equations via an energy method
2．発表標題 Goro Akagi
3．学会等名 BIRS-CMO Workshop ``New Trends in Nonlinear Diffusion: a Bridge between PDEs, Analysis and Geometry'', Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery (BIRS)（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 岡 大将（登壇者）、赤木 剛朗
2．発表標題 Qualitative space-time homogenization for the porous medium equation
3．学会等名 日本数学会 2021 年度年会函数方程式分科会
4．発表年 2021年

1．発表者名 岡 大将（登壇者）、赤木 剛朗
2．発表標題 Corrector results for space-time homogenization of nonlinear diffusion
3．学会等名 日本数学会 2021 年度年会函数方程式分科会
4．発表年 2021年

１．発表者名 赤木剛朗
２．発表標題 Fractional gradient flows in Hilbert spaces
３．学会等名 第 701 回『応用解析』研究会，早稲田大学（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 赤木剛朗
２．発表標題 Fractional Cahn-Hilliard system and Lojasiewicz-Simon gradient inequality
３．学会等名 偏微分方程式セミナー，北海道大学（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Goro Akagi
２．発表標題 Fractional gradient flows in Hilbert spaces
３．学会等名 AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Website of Goro Akagi http://www.math.tohoku.ac.jp/~akagi/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	(Stefanelli Ulisse)	ウィーン大学・数学科・教授	非整数階発展方程式の研究
研究協力者	(Schimperna Giulio)	パヴィア大学・数学科・教授	分数冪ラプラシアンを含む Cahn-Hilliard 系の研究
研究協力者	(Segatti Antonio)	パヴィア大学・数学科・教授	分数冪ラプラシアンを含む Cahn-Hilliard 系の研究

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
International Conference "Viscosity Solutions and Related Topics"	2018年～2018年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関