様　式　Ｆ－１９－２

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４年　６月１４日現在

機関番号：１２６１３
研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A)）
研究期間：2019～2021
課題番号：１８ＫＫ０３７９

研究課題名（和文）リーマン幾何の微分同相群による新たな乱流解析手法の創出

研究課題名（英文）Creation of new turbulence analysis method by using diffeomorphism groups of Riemannian geometry

研究代表者
米田　剛（YONEDA, Tsuyoshi）

一橋大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：３０６１９０８６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　7,200,000円
渡航期間：　0.1ヶ月

研究成果の概要（和文）：微分同相写像群によるオイラー流の研究、特に、共役点とArnold's stabilityとの関係性に対する洞察を進めることが出来た。共役点とは、大雑把に言って、摂動として小さな渦を加えたとき、その渦が崩壊しない状態を表す。一方で、Arnold's stabilityとは、大雑把に言って、その摂動としての小さな渦が、シアによって綺麗に消滅していく状態を表す。
この物理的解釈により、共役点とArnold’s stabilityは相反する流体現象であることが想像できるが、その数学的な洞察を推し進めたことこそが本研究の成果となる。

研究成果の学術的意義や社会的意義
流体の非線形挙動を深く洞察出来得る数学解析を提示できた、という意味合いにおいて、本研究の学術的意義は大きい。特に、2021年にJFMに出版されたMatsumoto-Otsuki-Ooshida-Gotoの論文で「Euler座標とLagrange座標の違いで乱流の或る重要な統計量が本質的に変わってしまう」ことが物理的に示されており、それは「流体の非線形挙動に対する数学的洞察を飛躍させるためには、Lagrange座標に密接に関係するリー代数構造を深くみていく必要がある」と翻訳出来得る。その問いへの答えを目指す形で「微分同相写像群によるオイラー流の研究」を推し進めることが出来た。

研究成果の概要（英文）：We could proceed the study of the incompressible Euler flow by using diffeomorphism groups, especially we could clarify some relationship between conjugate point and Arnold's stability. The meaning of "conjugate point" is that the small scale vortices (as the perturbations) do not break down along the large scale flow. On the other hand, Arnold's stability represents a state in which small scale vortices as perturbations have been clearly disappearing by the large scale shear flow.
This physical interpretation suggests us that the conjugate point and Arnold's stability are contradictory fluid phenomena. From this point of view, we could proceed the corresponding mathematical analysis, by using the diffeomorphism groups approach.

研究分野：数理流体力学

キーワード：微分同相写像群　Euler方程式

様　式　Ｆ－１９－２

１．研究開始当初の背景

Clay 財団は 2000 年に、21 世紀に解かれるべき数学の未解決問題を 7 つ挙げた。そのうちのひとつが、流体力学の基礎方程式である 3 次元 Navier-Stokes 方程式の滑らかな時間大域解の一意存在、または解の爆発を導くことである。Leray(Acta. Math. 1934)による弱解の研究に始まり、Fujita-Kato(Arch. Ratio. Mech. Anal. 1964)による強解の結果によって飛躍的に進展した 3 次元 Navier-Stokes 方程式の数学研究は、今現在でも「様々な関数空間やそれに関連するノルム不等式、エネルギー法、方程式の線形化とその摂動」といった解析道具を中心に進められている。数学解析分野で長年取り組まれてきている未解決問題だが、最終的な解決には至っていない。これは端的に言って、**流体方程式に本質的に内在する非線形メカニズムを深く洞察する為の数学解析道具が十分にそろっていない**ことに起因している。
一方で、その非線形性によって本質的に生成される乱流の研究は、19 世紀後半の Reynolds のパイプ内にインクを流す実験に始まり、1922 年の乱流のカスケード描像を見出した Richardson、20 世紀半ばに一様等方性乱流の統計理論を確立した Kolmogorov らによる寄与により、今現在でも発展し続けている。**乱流研究では、Navier-Stokes 流を平均流と乱流変動に分解し、乱流変動部分の平均流への寄与をうまく近似し、平均流のみで閉じた乱流方程式の導出を目指している**（これをクロージャー問題と言う）。
まとめると、数学・物理両分野において、そういった流体運動に本質的に内在する非線形メカニズムそのものに対する数理的理解が進んでいない、といえる。
更に、ここで、本研究の直接的な背景となる「2 次元乱流のエネルギー逆カスケード」の概略も述べておこう。2 次元乱流のエネルギー逆カスケードとは、エネルギー注入によって駆動された 2 次元乱流において、エネルギーが高周波から低周波へ流れることである。2 次元乱流では、このエネルギー逆カスケードによって最終的には大スケールの渦が安定的に生き残ることが広く知られており、そのメカニズム解明は実社会の実用上も重要である。これを物理の世界では「自己組織化」という。木星の帯状流（低周波の流れ）の安定的存在が好例であり、核融合反応研究におけるトカマク・ヘリカル型の核融合炉設計では、そういったプラズマの自己組織化の促進をキーポイントとしている。しかしながら、その物理的重要性に反して、エネルギー逆カスケードの数理的メカニズムはほとんど未知のままである。その解明に対する最初の一歩はやはり「大スケールと小スケールの渦」に対する非線形解析となろう。ここで注意しておきたいことがある。もちろん、解析学サイドでも、せん断流（大スケールの渦）に対する安定性・不安定性の研究がすでに多数存在する。しかしながら、そのほとんどは、方程式を線形化したものに対する安定性解析、或いはせん断流自身が無限のエネルギーを有するものである。有限エネルギーを持つ大スケール渦との真の非線形相互作用に着目した研究は（近似化方程式に対する膨大な先行研究結果と比べると）ほとんど皆無である。

２．研究の目的

そのような背景を踏まえた上で、本研究では、数学・物理二つの研究分野に共通して問題となっている「非線形」に着目し、特に、従来の流体物理の解析手法では説明できなかった様々な流体物理現象を、まったく新しい数学的視座から理解することを目的としている。そのような中、2021 年に Journal of Fluid Mechanics に出版された Matsumoto-Otsuki-Ooshida-Goto の論文は示唆的である。その論文において「オイラー座標とラグランジュ座標の違いで乱流の或る重要な統計量が本質的に変わってしまう」ことが物理的に示された。すなわち「流体運動に対する数学的洞察を飛躍させるためには、ラグランジュ座標そのものの洞察、すなわちリー代数構造を深くみていく必要があるのではないか」と解釈出来得る。そういった示唆的論文も相まって、本研究では、特に微分同相写像群を使った微分幾何学的・リー代数的アプローチに焦点を当てている。
一方で、物理現象としては、前述の二次元乱流に焦点を当てている。二次元乱流においては、エネルギー逆カスケードによって最終的には大スケールの渦のみが生き残ることが広く知られているが、その数理的構造となると、ほとんど未解明のままである。そこで、本研究は「そういった非線形性が卓越した流れ（特に Euler 流）の長時間挙動を、前述の微分同相写像群のアイデアによって詳しく調べた」という位置づけになる。より具体的には、C^1 に埋め込まれるソボレフ空間による微分同相写像群から生成される無限次元多様体がその洞察の出発点となる。その多様体上の測地線が Euler 方程式の解となることが広く知られている（V. I. Arnold, 1966）。そして、その多様体の共役点(conjugate point)のありかたを深く洞察することがカギとなる。多様体が例えば二次元球面の場合、その共役点は理解しやすい。北極点から出発する二本の測地線は南極で必ず交差するが、この交差する南極を共役点という（ただ、無限次元の場合の共役点はより複雑である）。無限次元多様体上の測地線である Euler 流に、摂動を加たもう一つの Euler 流と比較した場合、摂動で乱されている筈の流体粒子が（大雑把ではあるが）その共役点で再び一致することになる（より厳密には、かなり近づく）。これは摂動に対するある種の安定性を表しており、非粘性流の長時間挙動を詳しくみるための新たなる解析手法となる（幾何学サイドでも、共役点のあり方を調べることは、多様体の大域的構造を調べる際に重要であ

る)。このアイデアは、1996 年の Misiolek 氏の論文(PAMS)が萌芽となる。その論文では、Euler 方程式の或る解（上述の大スケールの渦に対応する）の共役点の存在性が初めて論じられている。その手法を目の当たりにした際、非線形性が卓越した流れの挙動を数学的に詳しく調べるための有力な解析手法になると確信した。その有力なアプローチをもとに微分同相写像群の洞察を深め、その深まりとともに、大スケールと小スケールの非線形相互作用の洞察を進捗させていくことこそが、本研究の具体的な目的となる。

３．研究の方法

本研究者が主軸となり、各分野をリードする各研究者との議論が主な研究方法となる。微分同相写像群を使った Euler 方程式研究に詳しい Gerard Misiolek 氏、Onsager 予想といった乱流の数学研究に詳しい Theodore D. Drivas 氏、およびリー群と表現論に詳しい田内大渡氏、流体方程式の数学解析に詳しい In-Jee Jeong 氏らと共に、流体運動の非線形メカニズムの数理的理解を進めた。
Misiolek 氏の所属機関（アメリカ・インディアナ州・Notre Dame 大学）に長期滞在し、対面の議論を活発に進めることが（素朴ではあるが）最も有効な研究方法であった。しかしながら、COVID-19 という歴史的出来事の影響で、不本意ではあるが、予定していた渡航期間に現地へ訪れることが叶わなかった。その代わりに、オンラインによる研究打ち合わせを進め、幸運にも、本研究テーマである「微分同相写像群によるオイラー流の研究」を推し進めることが出来た。

４．研究成果

「微分同相写像群によるオイラー流の研究」を推し進めることが出来た。特に、「共役点」と Arnold's stability との関係に対する洞察を推し進めることが出来た。ここで言う共役点は、大雑把に言って、微分同相写像群から生成される無限次元多様体上の測地線の交点を意味する。無限次元多様体上の測地線としての Euler 流に、摂動を加えたもう一つの Euler 流を比較した場合、摂動によって乱れている筈の流体粒子（微分同相写像）が、その共役点で再び一致する（より厳密には、かなり近づく）。これは、摂動に対するある種の Lagrangian 安定性を表している。物理的には、摂動として小さな渦を加えたとき、その渦が崩壊しない状態を表す。一方で、Arnold's stability とは、十分小さい摂動を加えた定常流に対する energy-enstrophy の Lyapinov 安定性を意味する。物理的には、摂動として小さな渦を加えたとき、その渦がシアによって綺麗に消滅していく状態を表す。
なお、上述のような Lagrangian stability と Arnold’s stability の物理的解釈を得ることが出来たことも本研究の大きな成果となる。その物理的解釈により、Lagrangian stability と Arnold’s stability は相反する流体現象であることが想像できる。それを数学的に厳密に証明することこそが具体的な研究テーマとなる。
我々は、まず、領域が二次元平面内の straight periodic channel か円環か円盤の場合を考えた。それらの場合、どの Arnold stable flow も共役点を持たないことを示した (Drivas-Misiolek-Shi-Y 2021)。更に、この発展的研究として、滑らかな境界を持つ二次元コンパクトリーマン多様体上の Arnold stable flow と共役点との関係性に対する洞察も推し進めることが出来た(Tauchi-Y, 2022)。より具体的には、Misiolek 曲率という、共役点の存在判定条件（ただし、十分条件だが必要条件ではない）と Arnold stable flow の関係を明確にした。より詳しく述べると「滑らかな境界を持ち、ある「自然な」条件を満たす二次元多様体上の Euler 流が Arnold stable solution であるならば、Misiolek 曲率が非正になる」という定理である。なお Misiolek 曲率が真に正値になる場合、共役点の存在が保証される。前述の物理的解釈を数学的に正当化させることを目指した定理となる。証明には微分同相写像群、リー代数を駆使しており、その点において、流体の非線形挙動に対する新たなる解析手法の萌芽が見受けられる。

また、リー群の随伴表現から導かれる「大スケールと小スケールの相互作用の表現公式」を駆使することで、3 次元乱流の散逸構造に対する数学的洞察を進めることもできた。散逸領域では extreme dissipation が引き起こされていることが Elsinga-Ishihara-Hunt (2020) によって報告されている。特に significant shear layer の中に sublayer, sub-sublayer が生成され得ることが示されている。そこで本研究では、その extreme dissipation の数理的理解を深めるための数学モデルを提案した（Jeong-Y, 2022)。具体的には、Navier-Stokes 方程式の滑らかな解の列を洞察した。この数学モデルには移流拡散方程式が本質的に関与しており、そのモデル構成の際、リー群の随伴表現が一役買っている。その数学モデルを使って、shear layer が粘性散逸を本当に増強することを証明した。より具体的には、通常の熱散逸評価（extreme ではない dissipation）と、shear layer による引き伸ばし効果が合わさった場合の散逸評価を

比較し、そこに本質的な違いが現れることを確認した。

なお、本研究においては、「大スケール」・「小スケール」という言葉が随所に使われている。そういったスケール概念そのものを Littlewood-Paley 理論・Besov 空間論に基づいて洞察することもできた。実際のところ、物理分野でもバンドパスフィルタという概念がすでに存在しており、要はそのフィルタに対する数学理論だとみなすこともできる。バンドパスフィルタを施したベクトル場によるラグランジュ流だけを使って乱流を洞察した場合、スケール分解を施してしまっている以上、スケール間のエネルギーの受け渡し・カスケードの洞察に限界が出てきてしまう。しかし一方で、スケール分解が施されていない生のベクトル場のラグランジュ流だけで乱流を洞察した場合、スケール概念がどうしてもあいまいになってしまう。この両者をうまいアンバイで渡り合いながら、ラグランジュ流を駆使し、スケール間のエネルギーの受け渡し・カスケードをうまく洞察できる表現理論を構築することが、今後の課題となる。そういった今後の数学研究課題を見出せたことも、本研究の隠れた成果となる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 T. Drivas, G. Misiolek, B. Shi and T. Yoneda	４．巻 46
２．論文標題 Conjugate and cut points in ideal fluid motion	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Annales mathematiques du Quebec	６．最初と最後の頁 207-225
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40316-021-00176-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 T. Tauchi and T. Yoneda	４．巻 -
２．論文標題 Arnold stability and Misiolek curvature	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Monatshefte fur Mathematik	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.48550/arXiv.2110.04680	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 I.-J. Jeong and T. Yoneda	４．巻 150
２．論文標題 Quasi-streamwise vortices and enhanced dissipation for the incompressible 3D Navier-Stokes equations	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	６．最初と最後の頁 1279-1286
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/15754	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

COVID-19という歴史的出来事と渡航予定期間が丁度重なってしまった影響で、不本意ではあるが、あらかじめ予定していた渡航期間に現地に訪れることが叶わなかった。Notre Dame大学へ赴く数日前に「COVID-19のパンデミックが起き始めているので、出張延期を勧告します」との連絡を受け、急きょ、渡航をキャンセルした。よって、本研究の直接経費使用は、この渡航のキャンセル料のみである。
そのような過酷な状況であったにも関わらず、オンラインによる先方との研究打ち合わせを推し進め、幸運にも、本研究テーマである「微分同相写像群によるオイラー流の研究」を推し進めることが出来た。より具体的には、共役点とArnold stable solutionとの関係性解明を進めることができた。
なお、渡航期間が0.1か月となっているが、これはシステム上そのように表示されているだけであり、実際の渡航期間は0か月である。

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	ミジオレック　ジェラード (Misiolek Gerard)	ノートルダム大学・Department of Mathematics・Professor	

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
その他の研究協力者	ドリバス　セオドア (Drivas Theodore)	ニューヨーク州立大学ストーニーブルック校・Mathematics Department・Assistant Professor	
その他の研究協力者	田内　大渡 (Tauchi Taito)	九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所	学振特別研究員-PD
その他の研究協力者	ジョン　インジー (Jeong In-Jee)	ソウル大学校・Department of Mathematical Sciences・Assistant professor	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Notre Dame University			
米国	Stony Brook University			
韓国	Seoul National University			