

令和 4 年 9 月 8 日現在

機関番号：14401

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A））

研究期間：2019～2021

課題番号：18KK0386

研究課題名（和文）非線形分散型方程式における遷移現象とソリトンの安定性理論の研究

研究課題名（英文）Research on threshold phenomena and stability of solitons in nonlinear dispersive equations

研究代表者

眞崎 聡（Masaki, Satoshi）

大阪大学・基礎工学研究科・准教授

研究者番号：20580492

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 9,600,000円

渡航期間： 9ヶ月

研究成果の概要（和文）：非線形分散型方程式に対して、解の時間大域挙動の関する研究を行った。最も大きな成果は、線形ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の大域挙動の分類である。予備研究としてデルタポテンシャルをもつ場合において安定ソリトンの周りでの漸近安定性の研究を行ったのち、それらの知見を用いて第一励起状態のエネルギーより小さいエネルギーを持つ小質量解の挙動の分類を行った。並行して、長距離散乱問題の研究も行った。こちらにおいても当初の予想とは異なる方向に研究が発展した。具体的な成果として、1次元3次方程式系の大域挙動の分類が得られた。これにより方程式系の全容把握に向けた系統的なアプローチが可能になる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形分散型方程式の解の時間大域ダイナミクスの研究において、現在は不安定ソリトンが一つだけ存在する場が多く扱われているが、本研究では安定ソリトンが存在する場合を扱うことができた。物理的な背景を考えると、安定ソリトンが存在する状況を考察する方が自然である。本研究でこの状況における解析の基本的な結果が得られた。長距離散乱理論においては、非多項式型の非線形項の解析を進展させることに成功した。また、この研究で得られた3次方程式系の分類によって、系統的に新しい種類の挙動を発見できた。従来の3次方程式系の分類とは少し異なる視点を与えており、今後の他の分散型方程式系の研究にも応用が可能であると期待される。

研究成果の概要（英文）：We study the large-time behavior of solutions to the nonlinear dispersive equations.

The biggest contribution is the classification of the global behavior of solutions to the nonlinear Schrodinger equation with linear potential below the first excited energy. As preliminary studies, we consider the delta potential case and obtain the asymptotic stability of solitons. By using the knowledge obtained in this study, the above result is obtained.

We also obtained results on modified scattering. We had much more progress than expected. We establish the classification result for cubic dispersive systems in one space dimension. This enables us to a systematic approach to understand the whole picture of the behavior for systems.

研究分野：関数方程式論

キーワード：非線形分散型方程式 非線形シュレディンガー方程式 非線形クラインゴールドン方程式 解の時間大域ダイナミクス 定在波解の安定性 長距離散乱 修正散乱 非線形方程式系の分類

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

近年、非線形分散型方程式の時間大域挙動に関する変分問題の解析手法が発展している。これは、線形分散型方程式の分散型評価・ストリッカーズ評価に関係するプロファイル分解定理などに基づくものである。このような解析手法などにより、非線形方程式の解の時間大域挙動の切り替わりの様子が詳しく解析できる。

これらは、主に第一ソリトンが不安定となる場合に行われている。物理的な背景からは、第一ソリトンは安定である方が自然であるので、そのような方程式に対する結果が期待される。このような方程式は質量劣臨界と呼ばれる場合に相当する。また、物理的な背景をもつ場合の多くは、非線形項が長距離型と呼ばれるものである。長距離型非線形を持つ場合には、小さい解の漸近挙動にも非線形項の影響が現れるいわゆる修正散乱と呼ばれるタイプの挙動が起こる。長距離型も質量劣臨界の一種である。特定のモデルは可積分系であり、逆散乱法により解の挙動が詳しく調べられるが、可積分となるモデルは多くないため、逆散乱法に頼らない“偏微分方程式論的”な手法で解析ができることが望ましい。

研究開始時点において、質量劣臨界の場合には先行結果がほとんどなく、研究代表者が初めて質量劣臨界においてこのような解の時間大域挙動の遷移に関する研究を行った。その結果、いくつかの質量劣臨界方程式に対して解の切り替わりとなる未知の挙動の解の存在が得られた。

## 2. 研究の目的

本研究は、安定ソリトンを持つような非線形方程式において、解の時間大域挙動の移り変わり、遷移現象、を理解することを第一の目的とした。これを実現するための手段として、前項で述べた未知の挙動の解の素性を知ることが目標とした。また、関連する研究として、ソリトン解周りの解の挙動を知るため、ソリトンの安定性理論の研究も行うこととした。

二つ目として、長距離型非線形項をもつ場合の散乱の結果をより改良・拡張することを目的とした。ゆくゆくは長距離型をもつ場合における遷移の様子を調べたい。しかし、新しい変分解析の手法をこの場合に拡張するには技術的困難が多い。その解決に向けて、長距離散乱理論についての理解の深化を目指す。

## 3. 研究の方法

第一の研究については、この分野の専門家である Rowan Killip 氏 (UCLA)、Monica Visan 氏 (UCLA) と研究打ち合わせを行うことで効果的に研究を進めることを図る。このため、カリフォルニア大学ロサンゼルス校に長期滞在を行う。また、ソリトン解の安定性解析については、現在興味を同じくしている Jason Murphy 氏 (Missouri S&T)、瀬片純市 氏 (九州大) と研究打ち合わせを行うことで効果的に研究を進めることを図る。このため、カリフォルニア大学ロサンゼルス校滞在中に、ミズーリ工科大学に出張し、Jason Murphy 氏との打ち合わせも行う。長距離散乱については、国内に専門家が数多くいるので、専門家と情報交換を密に行うことで研究の効果的な推進を図る。国内外の研究集会に参加し、情報交換や研究打ち合わせの機会を積極的に得る。

## 4. 研究成果

研究期間内に出版された論文それぞれについて、簡単な概要を述べる。

“Optimal decay rate of solutions for nonlinear Klein-Gordon systems of critical type” と題された杉山航希氏との共著論文においては、非線形クラインゴルドン方程式(系)において、dissipative decay と呼ばれる摩擦型の非線形項をもつ場合の解の時間減衰レートより速く減衰することがないことを示した。

“A sharp scattering threshold level for mass-subcritical nonlinear Schrodinger system” と題された浜野大氏との共著論文では、非線形シュレディンガー方程式のシステムを考え、システムの特徴構造を加味した新しい散乱の判定条件を提案した。

“Long range scattering for the complex-valued Klein-Gordon equation with quadratic nonlinearity in two dimensions.” と題された瀬片純市氏、瓜屋航太氏との共著論文においては、空間2次元における複素数値の臨界クラインゴルドン方程式の漸近挙動を考察した。解は長距離散乱型の挙動をもつが、その漸近挙動として、楕円積分に依存する係数が現れることを明らかにした。

“On Asymptotic behavior of solution to cubic nonlinear Klein-Gordon systems in one space dimension” と題された瀬片純市氏、瓜屋航太氏との共著論文においては、3次非線形方程式系に関する新しい分類方法を導入した。それはシステムにおける非線形項の係数を行列に対応させる方法である。これにより方程式間での同値性を簡明に記述できるほか、方程式の挙動の複雑性が行列のランクと対応するという従来にない良い点がある。ここで展開した分類論により、系統的に新しいタイプの漸近挙動をもつシステムを特定することができた。

また、期間中の研究成果であるが、研究終了までに出版に至っていない、投稿中のプレプリ

ント論文が5編ある。そのうちの一つである“Global dynamics below excited solitons for the non-radial NLS with potential”と題された Jason Murphy 氏、瀬片純市氏との共著論文においては、安定ソリトンを発生させるような線形ポテンシャルをもつ非線型シュレディンガー方程式に対して第一励起状態のエネルギーより小さいエネルギーを持つ小質量の解の挙動を分類することに成功した。

カリフォルニア大学ロサンゼルス校への長期滞在は12か月を予定していたが、COVID19の世界的流行によって中断を余儀なくされた。長期滞在中に、Killip 氏 Visan 氏と、研究の目標達成のため、可積分系において存在が知られているある特殊解について、偏微分方程式論的に理解をし、それを質量劣臨界の方程式に一般化することを目指して研究を行った。これにより、現在はあまり理解されていない新しいタイプの解の解析が可能になり、それにより当初の目的である未知の挙動の解析につながることを期待される。この研究によって、今後の発展につながり得るいくつかの新しい知見は得られたが、論文の形で発表するに至るにはもう少し時間を要する段階である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Satoshi Masaki, Jun-ichi Segata, Kota Uriya	4. 巻 -
2. 論文標題 On Asymptotic behavior of solution to cubic nonlinear Klein-Gordon systems in one space dimension	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transaction of the American mathematical society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Satoshi Masaki, Jun-ichi Segata, Kota Uriya	4. 巻 139
2. 論文標題 Long range scattering for the complex-valued Klein-Gordon equation with quadratic nonlinearity in two dimensions.	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Pures Appl.	6. 最初と最後の頁 177-203
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Satoshi Masaki, Jason Murphy, Jun-ichi Segata	4. 巻 13
2. 論文標題 Stability of small solitary waves for the one-dimensional NLS with an attractive delta potential	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Anal. PDE	6. 最初と最後の頁 1099-1123
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masaru Hamano, Satoshi Masaki	4. 巻 41
2. 論文標題 A sharp scattering threshold level for mass-subcritical nonlinear Schrodinger system	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete Contin. Dyn. Syst.	6. 最初と最後の頁 1415-1447
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Masaki and Koki Sugiyama	4. 巻 33
2. 論文標題 Optimal decay rate of solutions for nonlinear Klein-Gordon systems of critical type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 247-256
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 眞崎聡、瀬片純市、瓜屋航太
2. 発表標題 3 次非線形方程式系の分類について
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 眞崎聡、瀬片純市、瓜屋航太
2. 発表標題 ある非線形クラインゴルドン方程式系の解の漸近挙動について
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 眞崎聡
2. 発表標題 非線形項Klein-Gordon 方程式系における 解の時間減衰の最良レートについて
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2020年 ~ 2021年

1. 発表者名 眞崎 聡
2. 発表標題 Modified scattering for complex-valued solutions to Klein-Gordon equation with a gauge invariant quadratic nonlinearity
3. 学会等名 RIMS研究集会「偏微分方程式の臨界現象と正則性理論及び漸近解析」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Satoshi Masaki
2. 発表標題 LONG RANGE SCATTERING FOR NONLINEAR DISPERSIVE EQUATIONS WITH CRITICAL NON-POLYNOMIAL NONLINEARITY
3. 学会等名 Harmonic Analysis and Dispersive PDEs: Problems and Progress (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>投稿中のプレプリント  X. Cheng, Z. Guo, and S. Masaki, "Scattering..."  <a href="https://arxiv.org/abs/2003.01468">https://arxiv.org/abs/2003.01468</a></p> <p>S. Masaki, J. Murphy, and J. Segata, "Asymptotic stability..."  <a href="https://arxiv.org/abs/2008.11645">https://arxiv.org/abs/2008.11645</a></p> <p>S. Masaki, J. Segata, and K. Uriya, "Asymptotic behavior..."  <a href="https://arxiv.org/abs/2112.06427">https://arxiv.org/abs/2112.06427</a></p> <p>S. Masaki, J. Murphy, and J. Segata, "Global dynamics..."  <a href="https://arxiv.org/abs/2204.03176">https://arxiv.org/abs/2204.03176</a></p> <p>N. Kita, S. Masaki, J. Segata, and K. Uriya "Polynomial deceleration..."  <a href="https://arxiv.org/abs/2205.02651">https://arxiv.org/abs/2205.02651</a></p>
---

## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	ピサン モニカ  (Visan Monica)	カリフォルニア大学ロサンゼルス校・Department of Mathematics・教授	
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	キリップ ローワン  (Killip Rowan)	カリフォルニア大学ロサンゼルス校・Department of Mathematics・教授	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
その他の研究協力者	マーフィー ジェイソン  (Muphy Jason)	ミズーリ工科大学・Department of Mathematics and Statistics・助教	
その他の研究協力者	瀬片 純市  (Segata Jun-ichi)  (90432822)	九州大学・理学研究院・教授   (17102)	
その他の研究協力者	瓜屋 航太  (Uriya Kota)  (10779474)	岡山理科大学・理学部・講師   (35302)	

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	河海大学			
オーストラリア	モナシュ大学			
米国	カリフォルニア大学ロサンゼルス校	ミズーリ工科大学		