

令和 6 年 9 月 30 日現在

機関番号：32686

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A））

研究期間：2019～2023

課題番号：18KK0389

研究課題名（和文）D加群を用いた超平面配置とSolomon-寺尾複体の革新的研究

研究課題名（英文）Research on the Solomon-Terao complexes by using D-module theory

研究代表者

阿部 拓郎（ABE, TAKURO）

立教大学・理学部・教授

研究者番号：50435971

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 11,300,000円

渡航期間：1ヶ月

研究成果の概要（和文）：本研究計画では、超平面配置の研究において近年注目を集めているSolomon-寺尾多項式を中心とする理論にD加群特にLiouville複体の観点を取り入れることで、Solomon-寺尾二変数多項式の理解をD加群的視点から行った。まずLiouville代数のCohen-Macaulay性が自由性と同値なこと、及びLiouville複体の一変数へのある特殊化がSolomon-寺尾複体と一致することが分かった。これによりLiouville複体がSolomon-寺尾理論の二変数版である可能性が高まり、議論の枠組みが大きく広がった。更にZiegler予想を示すなど、対数の加群周りで大きな進展を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、直線の有限集合の一般化である超平面配置の代数を幾何・表現論の視点から解析・一般化することを目指した。まずSolomon-寺尾理論について説明する。超平面配置の代数は超平面に接するベクトル場、流れのようなものの集合である対数的ベクトル場の研究である。この対数的ベクトル場と組み合わせ論及び幾何と繋ぐものがSolomon-寺尾理論であった。これは代数的な定義を持っているが、これに対して近年Walther氏により導入されたD加群的視点を持つLiouville複体理論を融合することで、Solomon-寺尾理論に新たな視点を導入することが、本研究では達成された。

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied the Solomon-Terao polynomial theory, which attracts many interests recently, from the viewpoint of the D-modules, in particular, that of so called the Liouville complex theory due to Uli Walther. On this approach, a joint work with Castro and Narvaez in Sevilla, we observed that the freeness of arrangements coincides with the Cohen-Macaulayness of the Liouville algebra, and a specialization of the Liouville complex coincides with the Solomon-Terao complex. This shows that in a very high possibility, the Liouville complex theory could be regarded as a two-variable version of the Solomon-Terao complex theory. This enlarges the research of this area drastically. Also, in a joint work with Graham Denham in Western university, we proved the Ziegler's conjecture on the logarithmic differential forms. This was conjectured about 30 years before, and we investigated a theory to show it.

研究分野：超平面配置、代数学

キーワード：超平面配置 対数的ベクトル場 自由配置 Solomon-寺尾理論 Liouville複体 完全交差性 Cohen-Macaulay性 Ziegler予想

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

超平面配置の Solomon-寺尾理論は Solomon-寺尾二変数多項式をめぐる研究である。これは代数的に定義されたものであり、超平面配置の代数と組み合わせ論・トポロジーを繋ぐ美しい定理であるが、その定義が極めて代数的であること、及び Solomon-寺尾二変数多項式の特特殊化にはよい意味はあるものの、Solomon-寺尾二変数多項式それ自身に意味付けがないという弱点があった。更に Solomon-寺尾二変数多項式は自由配置と呼ばれる性質が良い場合以外計算方法がないという問題も存在していた。

### 2. 研究の目的

研究代表者は、Solomon-寺尾二変数多項式自身の意味付けを行うことを研究目的とした。そのための重要な概念が、D 加群的視点からパデュー大学の Uli Walther 氏により近年導入された Liouville 複体理論である。この理論の中に Solomon-寺尾理論と類似なものがあることが、代表者及び西オントリオ大学の Graham Denham 氏により観察されていた。そこで本研究では、Solomon-寺尾理論の中核を担う対数的ベクトル場及び対数的微分加群の研究を推進するとともに、Liouville 複体と Solomon-寺尾理論の関係を付けることを目的とした。そのため D 加群特に Liouville 複体と関係が非常に深いパラメトリック Annihilator の専門家であるセベリア大学の Francisco Castro 氏及び Luiz Narvaez 氏とともに本研究を推進することで Solomon-寺尾理論のより広範な理解を達成することを目指した。

### 3. 研究の方法

まず Liouville 複体を研究代表者、Castro 氏、Narvaez 氏の視点から解読し理解する。そのうえで、Solomon-寺尾理論の生みの親である研究代表者が両名にその要諦を伝えることで、双方の理論に精通した研究チームを作り上げ、その類似点、相違点を考察する。この上で Castro 氏、Narvaez 氏の D 加群に関する知識を総動員することで、二つの理論を統一的に理解する。更に Denham 氏と研究代表者は対数的ベクトル場と対数的微分形式の研究を通してこれらの理論の基盤を推進するとともに、超平面配置・D 加群と関連の深い幾何学を考察することでこれらの理論に更なる新しい視点を付け加える。

本研究は海外への長期滞在を元を実施される予定であり、実際一部は海外渡航中に達成された。しかしながら本研究計画が開始されたのは 2019 年であり、周知のとおり 2020 年初頭から新型コロナウイルスが世界を覆い、この海外長期滞在というプランは極めて困難となった。何度も調整を試みたものの、コロナ禍は想定以上に長引き、海外出張すらままならない状況が続いた。それに対応するため、打ち合わせなどはコロナ禍に一気に広まったオンラインツールを活用するなどし、かつメールベースの研究に変更するなどして、研究を推進した。

### 4. 研究成果

本研究では以下のような成果を得ることができた。まず Solomon-寺尾理論と Liouville 複体との関係についてであるが、Liouville 複体は二変数パラメータを持つ複体であった。これについて片方の変数に対してある種の特特殊化を行うと、それは本質的に Solomon-寺尾複体と一致することが判明した。更に Solomon-寺尾複体の第ゼロホモロジー群である Solomon-寺尾代数は、イデアル配置の場合は正則冪零 Hessenberg 多様体のコホモロジー環と同型であることがわかっている由緒正しい代数であるが、Solomon-寺尾代数が完全交差であることが超平面配置の自由性と同値であることがわかっていた。これに対して Liouville 複体のホモロジー群として定まる Liouville 代数が、tame 配置の場合についてはそれが Cohen-Macaulay 性を満たすことと、自由性が同値であることも分かった。このように Solomon-寺尾理論と Liouville 複体理論は極めて類似性が多いため、Liouville 理論が Solomon-寺尾二変数多項式と対応した、Solomon-寺尾理論の上部構造である可能性が判明するという大きな進展をあげることができた。本考察はセベリア大学の Castro 教授及び Narvaez 教授との共同研究であり、今後もさらに進展してゆくことが期待されている。

次に対数的ベクトル場に関連する研究について述べる。Solomon-寺尾理論は対数的ベクトル場から定義されるため、その構造研究が極めて重要である。そのためにもまず、Alexandru Dimca 氏及び Gabriel Sticlaru 氏とともに、対数的ベクトル場を構成する最小次数元に関する加除定理を定式化することに成功した。本定理は、Dimca 氏らの曲線論的な視点からの疑問をもとにしており、それに研究代表者の加除定理に関する知識及び対数的ベクトル場への深い理解がカギとなった。特に Ziegler 制限射の像を解析することが大きなポイントとなり、比較的まとまった形で定式化することができた。本結果超平面配置の代数的な視点からも重要であるが、特異点論への応用も持つ意義深い結果であり、Solomon-寺尾理論以外にも応用のある重要なものとなった。

更に対数的ベクトル場と対数的微分加群（これら二つを合わせて対数的加群以下と略記する）の構造論について、Graham Denham 氏と大きな進歩を得ることができた。それは自由配置の周辺に存在することが研究代表者の結果としてわかっている SPOG 配置に関する結果である。SPOG 配置は研究代表者が導入したもので、自由配置に構造に近いことが知られている。Solomon-寺尾多項式の難点は定義が複雑なためそもそも計算がほとんどできないことにあった。実際自由配置の場合以外の計算例は皆無に近かった。それを克服するために対数的加群の構造論は重要であった。これに対して代表者は Denham 氏とともに、対数的微分加群の場合及び対数的加群が重複度を持つ場合に対して、それらのそばにある配置が SPOG になることを証明した。厳密に言えば除法のほうは常に SPOG 配置であり、加法についてはある種の条件が必要であるが、これにより多重配置である場合を含む、自由配置周りの状況が良くわかるようになった。更に Denham 氏との連作論文において、これらの結果を用いて、1989 年に Ziegler が予想した対数的微分加群の構造に関する二つの予想（Ziegler 予想）を一つは肯定的に、もう一つは否定的に解決することに成功した。具体的には肯定的に解けた予想は、自由配置に generic な超平面を加えた場合、そこへ制限して得られる配置は自由でないこと、及びその対数的微分加群における制限射が全射であることを予想するものであり、もう一つは配置の critical 性と呼ばれる性質に関するものであった。二つとも 30 年以上未解決であった予想であり、その完全解決及び、そのための様々な手法の開発という点で、本研究は高く評価されている。

最後に、Solomon-寺尾多項式の計算手法を代表者が単独で行った研究について述べる。Solomon-寺尾理論は様々な部分において計算が難しく、例を組織的に得ることが難しいという根本的な問題を抱えていた。これに対して代表者は B 列と名付けられた、これまでによく用いられていた Euler 完全列とは異なる対数的加群の間の完全列を導入し、先の SPOG 構造に関する結果も併せて、自由配置の周りにおける配置の Solomon-寺尾二変数多項式を組織的に計算する方法を初めて導入することに成功した。具体的には自由配置と、その制限が自由となるような配置が与えられた場合、その超平面を加えるあるいは除いて得られる配置の Solomon-寺尾二変数多項式を計算する方法を得ることができた。これはこれら二つの自由配置の指数の間に包含関係がある場合は、古典的な寺尾の加除定理と Solomon-寺尾の理論から知られていたが、そうでない場合はこのようなよいセットアップの下であっても知られていなかった。これにより計算可能な範囲が圧倒的に増え、Solomon-寺尾理論の研究の飛躍的な促進につながることを期待されており、かつ B 列理論そのものも対数的加群の研究に新しい視点を与えており、極めて重要な研究成果であるといえる。

これらが研究代表者が中心となって残した新しい結果に関する記述であるが、同時に本研究において重要な国際交流も、コロナ禍という困難がありながら積極的に行うことができた。まずまだコロナ禍が明けきっていない 2023 年 1 月には九州大学においてやはり国際研究集会「Combinatorics, Geometry and Commutative Algebra of Hyperplane Arrangements」を開催した。これは研究代表者が世話人代表となり、当時ポスドクとして九州大学に滞在していた Paul Muecksch 氏及び大阪大学の吉永正彦教授を共同世話人として開催されたものである。当時は日本への入国条件が厳しかったこと、およびそもそも入国が可能となったばかりのタイミングだったこともあり海外から招聘できた研究者はそこまで多くはなかったものの、ドイツとフランスから研究者を招聘し、国内では数年ぶりとなる超平面配置の国際研究集会を対面で開催することができた。その結果として超平面配置の直交双対という、本研究の新しいアイデアを得ることができ、また情報収集や現在も続いている新しい研究の萌芽を得ることができた。

それと連続する形で 2023 年 2 月にやはり九州大学で、国際研究集会「D-modules and Hyperplane arrangements」を開催することができた。D 加群は本研究計画の中心的テーマである Liouville 複体と関連するものであり、D 加群と超平面配置をテーマにした研究集会はおそらく日本で初の開催と考えられる。講演者はその Liouville 複体理論の創始者であるアメリカの Uli Walther 氏、その弟子で D 加群、対数的比較定理と超平面配置との関係について造詣の深い気鋭の若手研究者であるベルギー・ロイベン大学の Dan Bath 氏、そして研究代表者と Liouville 複体などについて共同研究を行っており、現在の世界の超平面配置研究をリードする研究者の一人であるカナダは西オンタリオ大学の Graham Denham 氏である。この三名は集会の前から九州大学に滞在し研究代表者と議論を重ねることで、Liouville 複体と Solomon-寺尾理論との関係について理解を深めることができおり、本研究において極めて有用な集会であった。

これらを経たうえでの本研究計画中における、国際交流の白眉といえるものが、2023 年 12 月に立教大学太刀川記念館にて開催した国際研究集会「Hyperplane Arrangements 2023」である。本研究集会は研究代表者が世話人代表を務め、更に国内の超平面配置研究者である大阪大学教授の吉永正彦氏、名古屋工業大学准教授の中島規博氏、北海道教育大学旭川校准教授の辻栄周平氏を世話人として綿密な準備の下開催された。本研究集会には超平面配置と D 加群及びそれと関連する代数、代数幾何、トポロジー、組み合わせ論、特異点論の研究者が広くアメリカ、カナダ、ドイツ、イタリア、スイスなどから集い、最新の研究成果を発表することで本課題に関連する情報収集を行いつつ、様々な共同研究及びその萌芽を生み出すことができた。特に国内外から若手研究者が多く参集し、これら最新の知見を学ぶことで、本研究計画及び関連分野の研究を国内外の若手研究者に広く知らしめることができたという点で、非常に有意義かつ、研究遂行上で重要な研究集会であった。本集会は 2023 年度に開催された超平面配置に関する研究集会ではおそらく世界でも最も大きなものでもあり、本研究を強く国際発信することにも成功したといえ

३.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Abe Takuro, Dimca Alexandru, Sticlaru Gabriel	4. 巻 54
2. 論文標題 Addition-deletion results for the minimal degree of logarithmic derivations of hyperplane arrangements and maximal Tjurina line arrangements	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 739--766
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10801-020-00986-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Abe, Takuro	4. 巻 118
2. 論文標題 Addition-deletion theorems for the Solomon-Terao polynomials and B-sequences of hyperplane arrangements	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 427--447
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-023-03426-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Takuro Abe
2. 発表標題 B-sequences of the logarithmic modules
3. 学会等名 Combinatorics, geometry and commutative algebra of hyperplane arrangements (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takuro Abe
2. 発表標題 B-sequences of logarithmic modules of hyperplane arrangements
3. 学会等名 Characteristic Polynomials of Hyperplane Arrangements and Ehrhart Polynomials of Convex Polytopes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takuro Abe
2. 発表標題 Projective dimension of logarithmic modules of hyperplane arrangements
3. 学会等名 RIMS x OIST Jointly-funded Workshop: "Interactions of New Trends in Algebraic Geometry and Singularities" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takuro Abe
2. 発表標題 Solomon-Terao algebra of hyperplane arrangements and singularities
3. 学会等名 Special Session on Geometry and Topology of Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuro Abe
2. 発表標題 Free arrangements, combinatorics and geometry
3. 学会等名 Hyperplane Arrangements and Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Researchmap <a href="https://researchmap.jp/7000008882">https://researchmap.jp/7000008882</a> Takuro Abe <a href="https://sites.google.com/site/takuroabemath/a-bu-ta-lang">https://sites.google.com/site/takuroabemath/a-bu-ta-lang</a>
---

## 6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	カストロ フランシスコ  (Castro Francisco)	セビリア大学・Department of Mathematics・Professor	
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	デンハム グラハム  (Denham Graham)	西オンタリオ大学・Department of Mathematics・Professor	
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	レールレ ゲルハルド  (Roehrl e Gerhard)	ルール大学ボーフム・Department of Mathematics・教授	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
その他の研究協力者	ナルバエス ルイス  (Narvaez Luis)	セビリア大学・Department of Mathematics・Professor	

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
その他の研究協力者	ウォルサー ウリ  (Walther Uli)	パデュー大学・Department of Mathematics・教授	

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Combinatorics, geometry and commutative algebra of hyperplane arrangements	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 D-modules and hyperplane arrangements	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Hyperplane Arrangements 2023	開催年 2023年～2023年

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
スペイン	セビージャ大学			
カナダ	西オンタリオ大学			
ドイツ	ルール大学ボーフム			