

研究種目：基盤研究 (S)
研究期間：2007 ~ 2011
課題番号：19104001
研究課題名 (和文) モジュライと代数的サイクルをめぐる代数多様体の数理
研究課題名 (英文) Study on algebraic varieties related to moduli spaces and algebraic cycles
研究代表者 桂 利行 (KATSURA TOSHIYUKI) 法政大学・理工学部・教授 研究者番号：40108444

研究代表者の専門分野：数物系科学
 科研費の分科・細目：数学・代数学
 キーワード：代数幾何

1. 研究計画の概要

代数多様体を理解しようとする時、分類するというのは有力な方法である。分類の指標としては、離散的な不変量と連続的なパラメータがある。連続パラメータの理論は、1960年代に D. Mumford によって厳密なモジュライ空間の理論として確立された。それは、しばしば代数多様体の構造を持ち代数幾何学の重要な研究対象となっている。また、どのような部分空間が存在するかを調べることも理解するための有力な方法を与える。

有限個の i 次元部分多様体の整係数の形式的な和を i 次の代数的サイクルという。この研究の目的は、モジュライ空間と代数的サイクルという重要な 2 つの対象を調べることである。中心的な課題は、次のとおりである。

- (1) 代数多様体のモジュライ空間の研究、
- (2) 志村多様体、とくにアーベル多様体のモジュライ空間の研究、
- (3) 広義の Calabi-Yau 多様体をファイバーとするファイバー空間の研究、
- (4) 代数的サイクルの構造の研究。

2. 研究の進捗状況

(1) 標数 2 における Artin 不変量 1 の超特異 K3 曲面の構造の解明 (代表者と金銅の共同研究)。このような K3 曲面の Neron-Severi 群は Leech lattice と符号 $(1, 1)$ の lattice の直和に埋め込めることを利用して、金銅と Dolgachev は、このような K3 曲面をある性質を持つ 42 本の有理曲線の存在によって特徴つけた。これらの有理曲線は lattice の Leech roots に対応しているが、本研究で一般化された Kummer 曲面を用いて、この Leech roots を幾何学的に構成し、その意味を明らかにし

た。これは、標数 2 に特有の現象であり、他の標数では状況がまったく異り興味深い。ちなみに、標数 2 では他の標数とは異なり、超特異楕円曲線の直積を involution で割った曲面は有理的になり、K3 曲面にはならないので、上記のように一般化された Kummer 曲面を考える必要がある。

(2) 研究分担者中村は 1999 年に構成したモジュライ空間のコンパクト化 $SQ_{\{g, N\}}$ に加えて、もうひとつ自然なコンパクト化 $SQ^{\text{toric}}_{\{g, N\}}$ を構成し、ふたつのコンパクト化の間について次のような基本的な定理を証明した。 $SQ^{\text{toric}}_{\{g, N\}}$ から $SQ_{\{g, N\}}$ への自然な射が存在し、内部 $A_{\{g, N\}}$ 上では恒等写像であって、両者の正規化の同型を引き起こす。金銅は、種数 6 の代数曲線のモジュライ空間を IV 型有界対称領域の算術商として記述し、代数曲線の退化と Satake-Baily-Borel のコンパクト化との関係を明らかにした。向井は、高次偏極 K3 曲面について、次数 30 の generic なものの研究を行い、有理 3 次曲線のモジュライ空間の中でのモジュライの良い記述を得た。特に、それらのモジュライ空間は単有理的であることが示される。また、primitive で次数 32 の場合のモジュライ空間の単有理性の証明の簡易化に成功した。

3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している
 数多くの研究論文が一流の国際的雑誌に発表されており、また、世界の各地で研究成果の発表がなされている。ホームページにあるように、本研究費を用いて数多くの国際会議や研究集会が開催され、これらの国際会議で

はフィールズ賞受賞者 G. Faltings をはじめ世界トップレベルの研究者を招待講演者として迎えており、情報の収集や成果の発信もしっかり行われている。現在作成中あるいは投稿中の論文も、研究代表者ならびに研究分担者合わせて数編あり、これらはこの研究プロジェクトが終了するまでには国際的な研究雑誌に受理されると思われる。研究分担者のうちの2名が、2010年8月にインドで行われる国際数学会議の招待講演者に選ばれていることも達成された研究水準の高さを示している。

4. 今後の研究の推進方策

平成22年度以降もこの3年間と同様であり、関連する数学の研究集会を開催して総合的な討論を行うとともに、分担者との個別の討論を織り交ぜて研究を進める。代数幾何、数論関係の資料を整備し、国内外の研究集会に参加し最新の情報を収集する。平成23年1月には10名程度の海外の本研究に関する第一線の研究者を招聘し、国際会議を開催する予定である。現在考えている招待講演者は、V. Alexeev, S. Schroerer, T. Ekedahl, F. Yu, Q. Liu, Y. Andre, B. Conrad, van der Geer, I. Dolgachev, C.-H. Chai, B. Moonen, M. Schuett 等である。最終年である平成24年1月にも中規模のまとめの国際会議を予定している

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 27 件)

[1] I. Nakamura : Another canonical compactification of the moduli space of abelian varieties, Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces (I. Nakamura and Lin Weng eds., Sapporo 2007), to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics vol. 58, Mathematical Society of Japan, 2010, pp. 69-135, 査読有.

[2] K. Mathsumoto and T. Terasoma, Arithmetic-geometric means for hyperelliptic curves and Calabi-Yau varieties, to appear in Internat. J. Math, 査読有.

[3] T. Terasoma, Algebraic correspondences between genus three curves and certain Calabi-yau varieties, to appear in Amer. J. Math, 査読有.

[4] S. Saito and K. Sato, A finite theorem for zero-cycles over p-adic fields, to appear in Annals of Mathematics, 査読有.

[5] S. Mukai, Curves and symmetric spaces, II, to appear in Ann. of Math, 査読有.

[6] M. Artebani and S. Kondo, The moduli of curves of genus 6 and K3 surfaces, to appear in Trans. Amer. Math. Soc, 査読有.

[学会発表] (計 80 件, 公開の研究セミナーを含む)

[1] T. Katsura, On the structure of cohomology groups of K3 surfaces in positive characteristic, "Algebraic Geometry in Characteristic p and Related Topics", Univ. of Tokyo, February 16, 2010.

[2] T. Katsura, Invariants of algebraic varieties in positive characteristic, KIAS Seminar, KIAS (Korea), March 29, 2010.

[3] T. Terasoma, Relative bar complex and mixed elliptic motives, Oberseminar, Essen, November 5, 2009.

[4] T. Saito, Local Fourier transform and epsilon factors, Journees arithmetiques de Rennes, Univ. de Rennes, July 10, 2009.

[5] S. Ishii, Singularities on jet schemes, Fifth Franco-Japanese Symposium on Singularities, Strasbourg University, 2009年8月27日

[6] S. Mukai, Unirationality of moduli spaces of polarized K3 surfaces, "Geometry of Algebraic Varieties", Steklov Institute, Moscow, Russia, June 30, 2009.

[7] S. Kondo, The moduli spaces of Enriques, Coble surfaces and automorphic forms, Lie algebras, vertex algebras and automorphic forms, at ICMS, Edinburgh, September 2, 2009.

[8] T. Katsura, From genus 2 to genus 3, Conf. on Explicit Structures in Modular Forms and Number, Kinnki Univ., September 7, 2008.

[9] T. Katsura, On the unirationality of Fermat varieties, Conf. of Characteristic p Method in Algebraic Geometry, Drobeta Turnu-Severin (Romania), July 15 and 16, 2007.

[その他]

ホームページ

hppt://kat.hosei.ac.jp/study