

平成 22 年 5 月 10 日現在

研究種目：基盤研究 (S)

研究期間：2007～2011

課題番号：19104002

研究課題名 (和文) 代数幾何と可積分系の融合と新しい展開

研究課題名 (英文) New developments and interaction between Algebraic Geometry and Integrable Systems

研究代表者 齋藤 政彦 (SAITO MASAHIKO)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80183044

研究代表者の専門分野：数学

科研費の分科・細目：数学・代数

キーワード：モジュライ空間, パンルヴェ方程式, モノドロミー保存変形, ミラー対称性

1. 研究計画の概要

(1) 研究の背景

代数曲線上の線形接続のモノドロミー保存変形を代数幾何学的なモジュライ理論で精密にとらえる事により, 可積分系の相空間の代数幾何学研究の有効性が明らかになった. 高次元代数幾何学の進展により, 代数幾何学と可積分系の新たな関係や, 数ミラー対称性や量子コホモロジーにおける様々な予想に関して, 代数幾何と可積分系の新たな関連が注目された.

(2) 研究目的

上記の背景の下, 我々の研究目的は以下のとおりである.

- ① モノドロミー保存変形の幾何学の確立
- ② 高次元双有理幾何学の研究と可積分系への応用
- ③ 量子コホモロジー, ミラー対称性の数学的理解

(3) 研究方法

上記の3つの研究目的のそれぞれについて代表者, 分担者および連携研究者がそれぞれの研究を行うとともに, 得られた成果の相互理解を図るために, セミナーや研究連絡を行う. 適宜, 国外の研究者とも連携し研究を推進する.

2. 研究の進捗状況

3つの研究目的について, 現在までの研究の進捗状況を述べる.

(1) モノドロミー保存変形の幾何学の確立

稲場・岩崎・齋藤による代数曲線上の確定特異点のみをもつ安定接続の理論とそれを用いたリーマン・ヒルベルト対応の理論

がすでにあり, 有効である事が知られていたが, さらに一般に不確定特異点を許す安定接続の理論を稲場と共同研究し, 局所指数に関する条件付きではあるが, ほぼ完成している. また, van der Put との共同研究により, 8種類のパンルヴェ方程式を, 線形接続のモノドロミー・ストークス保存変形の方程式として得る時に, 10種類の階数2の射影直線の線形接続が対応する事を示した. また拡張されたリーマン・ヒルベルト対応の行き先であるモノドロミー・ストークスデータのモジュライ空間が, 10種類の具体的なアファイン3次曲面の族として得られる事も示した. さらに, 派生する結果として安定接続のモジュライ空間の良い座標の理論, λ 接続を通じて, パンルヴェ系がヒッチン系に退化する様子の精密な記述, 接続のモジュライ空間の跳躍現象と τ 関数の関係等について田原や宮崎と結果を得ており, 現在論文を準備中である.

(2) 高次元双有理幾何学の研究と可積分系への応用

連携研究者の森によるQコニック束に関するProkhorovとの共同研究, 並河によるべき零軌道の双有理幾何的研究, 藤野の極小モデル理論の基本定理を簡易化, 松下の正則ラグランジュ束の幾何学等の成果がある. 可積分系への応用では山田によるパデ近似による微分および差分方程式の導出や, 岩崎によるパンルヴェ VI 型方程式に関する代数曲面の力学系の解析が興味深い.

(3) 量子コホモロジー, ミラー対称性の数学的理解

連携研究者である深谷は, シンプレクティック幾何学の観点からホモロジー的ミラー対称性の基礎づけを目指し, 大部の著書を出版し, 多くの興味ある結果を得ている. 吉岡は Donaldson 不変量の壁越え公式を一般の代数曲面の場合に示し, K-理論的 Donaldson 不変量の壁越え公式を Chern-Simon 項を入れた形で定式化し, Nekrasov 分配関数を利用して書き下した. また, ある条件の下で K3 曲面上の安定ベクトル束のモジュライ空間のホモロジー群にリー環の作用がある事を示した. 連携研究者の細野は, カラビ・ヤウ多様体の高次種数の Gromov-Witten 不変量を BCOV 正則アノマリー方程式の観点から研究し, BCOV 微分環という概念を定義し, いくつかの例について考察した.

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

研究目的 1, 2, 3 とともに, 期待している成果が上がっており, 今後の発展も期待できる.

4. 今後の研究の推進方策

研究目的 1 の一般の不確定特異点を許した接族の場合の論文を平成 22 年度中に完成し, また現在まで得られた関係する結果の論文の執筆を最優先とする. 研究目的 2 について, 研究集会やセミナーを組織し, 代数幾何の最新の結果を代表者, 分担者, 連携研究者で共有することに努める. 研究目的 3 については, 非可換ホッジ理論と研究目的 1 の基礎理論とを関係づけるために, 研究組織および外部の研究者を入れたセミナーを開催し, あわせて国内外の関連研究者とセミナーや相互訪問による研究連絡を密にして研究を進展させる. 平成 23 年度までにこの分野の専門書を出版する.

5. 代表的な研究成果

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 52 件)

① 齋藤 政彦, パンルヴェ方程式と代数幾何, 数学, (査読有) 掲載予定

② K. Yoshioka, An action of a Lie algebra on the homology groups of moduli spaces of stable sheaves, Adv. Stud. Pure Math., 58, 2010 (査読有) 掲載予定

③ S. Hosono, BCOV ring and holomorphic anomaly equation, Adv. Stud. Pure Math., 59, 2010, (査読有) 掲載予定

④ M. van der Put and M.-H. Saito, Moduli spaces for linear differential equations and the Painleve equations, Annales de l'Institut Fourier, 59, no.7, 2611-2667, 2009. (査読有)

⑤ Y. Yamada, A Lax formalism for the elliptic difference Painleve equation, SIGMA, 5, 15p, 2009. (査読有)

⑥ S. Mori and Y. Prokhorov, On Q-conic bundles, Publ. RIMS Kyoto Univ., 44, 315-369, 2008. (査読有)

⑦ Y. Namikawa, Birational geometry and deformations of nilpotent orbits, Duke Math. J., 143, 375-405, 2008. (査読有)

[学会発表] (計 72 件 (すべて招待講演))

① Y. Namikawa, Poisson deformations of symplectic varieties" workshop "Complex algebraic geometry" Sep.2009, Oberwolfach 数学研究所, Germany,

② M-H, Saito, Moduli theory of connections and Geometry of Riemann-Hilbert correspondences, RTG Grad. Summer School 'Geometry of quantum fields and strings', June 16, 2009, University of Pennsylvania, USA.

③ M. Noumi, The elliptic Painleve equation, I, II, III, Discrete Integrable Systems Seminar, June 2, 3 and 15, 2009, Isaac Newton Institute for Math. Sci. Cambridge, UK

④ Y. Yamada, Lax formalism for the elliptic difference Painleve equation, Geometric aspects of discrete and ultra-discrete integrable systems April, 3, 2009, Glasgow Univ, UK.

⑤ 藤野修, 「極小モデル理論と消滅定理」, 日本数学会 2008 年秋季総合分科会 特別講演, 2008 年 9 月 25 日, 東京工業大学.

[図書] (計 7 件)

① M.-H. Saito, S. Hosono, K. Yoshioka, (Eds), New Developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror Symmetry, (RIMS, Kyoto, 2008), Adv. Stud. Pure Math. Vol. 59, 2010. p. 437.

② Kenji Fukaya, Y.-G. Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono, Lagrangian intersection Floer theory, Anomaly and obstruction, International Press/Amer. Math. Soc., AMS/IP studies in advanced Math. 46, 2009. (2 volumes 800 pages)

[その他]

ホームページ

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~mhsaito/ftop.html>