

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2007～2010

課題番号：19204001

研究課題名(和文) 多変数保型形式と高次元モジュラー多様体の解析・幾何・整数論

研究課題名(英文) Analysis, geometry and arithmetic of automorphic forms of many variables and higher dimensional modular varieties

研究代表者

織田 孝幸 (ODA TAKAYUKI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：10109415

研究成果の概要(和文)：研究課題(C)とした、半単純 Lie 群の行列係数に関しては、 $SU(2,2)$  の middle discrete series の場合に、漸近展開に関して新たな結果を得た(古関春隆、早田孝博との共同研究)。 $SU(3,1)$ の離散家列表現の行列係数に関する明示公式の研究を進め、ほぼ完成させた(古関・早田との共同研究)。 $Sp(2, \mathbb{R})$ のある一般化主系列行列係数の漸近展開を利用して  $c$ -関数を明示的に求めた(飯田正敏との共同研究)。種数 2 のジーゲル・モジュラー群の基本領域の 0-cell の研究を推し進めた(早田孝博との共同研究)。

研究成果の概要(英文)：About matrix coefficients of semi-simple Lie groups, we obtained a more precise result for the middle discrete series of  $SU(2,2)$  about the asymptotic expansion. We investigated the explicit formula of the matrix coefficients of  $SU(3,1)$  (both are joint works together with T. Hayata and H. Koseki). Utilizing the asymptotic expansion, we obtained the explicit formula of the  $c$ -functions of certain P\_J-principal series representations of  $Sp(2, \mathbb{R})$  explicitly (joint work with M. Iida). We push forward the investigation of 0-cells of the fundamental domain of the Siegel modular group of genus 2.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	8,200,000	2,460,000	10,660,000
2008年度	7,700,000	2,310,000	10,010,000
2009年度	7,900,000	2,370,000	10,270,000
2010年度	7,700,000	2,310,000	10,010,000
年度			
総計	31,500,000	9,450,000	40,950,000

研究分野：代数学 代数学・幾何学 基礎解析学 幾何学 解析学 大域解析学代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：保型形式、automorphic forms, 球関数、spherical functions, Whittaker 関数、Whittaker functions, モジュラー多様体、modular varieties, 不連続群、discrete subgroups.

## 1. 研究開始当初の背景

1982年に、博士論文が *Periods of Hilbert modular surfaces*, Birkhäuser Boston, として出版された。次の研究の方向がなかなか定まらなかった。その後、1983年ごろから有界対称領域の算術商の Hodge 構造に関する研究の方向が見え始めたが、技術的に具体的な手がかりがえられなかった。1992年に

山下博氏の博士論文で  $SU(2,2)$  上の Whittaker 関数の研究を見つけ、Lie 群上の球関数からの研究の切り口が見え始めた。これを  $Sp(2, \mathbb{R})$  の場合に拡張することから始めて、研究の技術的な skill を身につけ始め、球関数の研究の保型的 L 関数への応用と、モジュラー多様体の幾何学への応用の二つの方向への新たな展開を目指した。

## 2. 研究の目的

各種のモジュラー多様体のコホモロジー群を超越的方法で研究する。より具体的には、1960年代の終わりごろに確立され、その後一般論としては、1980年代初頭の、Vogan-Zuckermanの論文で、Lie群の表現論の一般論の立場からは、ほぼ問題が完成・完了した「松島同型」をより深い見地から見直す。当面の目標は以下の3点である：

- 1) 調和的な保型形式の Fourier 展開を研究するため、Whittaker 関数の積分表示や、それを第2種の Whittaker 関数による展開する等の基本的な結果を得て、保型的 L 関数などに応用する。
- 2) モジュラー多様体の中のモジュラー・サイクルの Green カレントを構成する。
- 3) 表現の行列係数の明示的な公式を得る。これは Selberg 跡公式への応用を期待している。

## 3. 研究の方法

主として解析的な手法であるが、半単純 Lie 群上の代数解析的な手法を用いる。半世紀以上の長い時間かけて、Harish-Chandra などのアイデアや研究結果と、その発展による手法に依存するが、自明でない K-type をもつ球関数に関する部分は、我々のオリジナルな工夫もある。基本領域のセルの研究は、計算機と数式処理の最近のツールを使った。

## 4. 研究成果

[2007 年度]

飯田正敏氏（城西大学）との共同研究を完成した。論文は次年度に完成後東京大学数理学研究科の紀要に投稿し出版された。

[駒場における月例セミナー]講師とタイトルは、

11 月、小島教知（東京工業大学理学研究科）：Pullback formula for vector valued Siegel modular forms and its applications;

大西良博（岩手大学）：Congruences connecting Tate-Shafarevich groups with Hurwitz numbers.

10 月、若槻聡（金沢大学理学部）：2 次のジエーゲルカスプ形式の空間上のヘッケ作用素の明示的跡公式について 2 次のジエーゲルカスプ形式の空間上のヘッケ作用素の明示的跡公式について; 平野幹（成蹊大学工学部）：A propagation formula for principal series Whittaker functions on  $GL(3, \mathbb{C})$ .

9 月、長谷川泰子（東京大学数理学部）：Siegel principal series Whittaker functions on  $Sp(2, \mathbb{R})$ ; 市川尚志（佐賀大学工学部）：A higher rank version of Abel-Jacobi's theorem. などである。

[2008 年度]

過去の研究の完成に終始した。

[駒場月例セミナー]講師とタイトルは

12 月、軍司圭一（Postech）：

On Siegel Eisenstein series of degree two and weight 2.

11 月、宗野恵樹（東京大学数理学部）： $(\mathfrak{g}, K)$ -module structure of the principal series of  $GL(3, \mathbb{C})$ ; 織田孝幸：Toward effectively computable integral basis of simple  $\mathfrak{gl}_4$ -modules of finite dimension. (II).

7 月、刈山和俊（尾道大学経済情報学部）：On certain types and the Hecke algebras for unramified p-adic unitary groups; 鍛冶匠一（東京大学数理学部）：The  $(\mathfrak{g}, K)$ -module structures of the principal series representations for  $SL(4, \mathbb{R})$ ,

5 月、Raimondas Vidunas（神戸大学理）：Identities between Appell's and univariate hypergeometric functions

示野 信一（岡山理科大学理学部）：Whittaker functions with one-dimensional  $K$ -type on a semisimple Lie group of Hermitian type.

など。

[2009 年度]

(A) Whittaker 関数関連： $SL(n, \mathbb{R})$  の主系列表現の極小  $K$ -type をもつ Whittaker 関数の動径成分を求める結果を得た。成蹊大学の石井卓氏との共著論文：“Calculus of principal series Whittaker functions on  $SL(n, \mathbb{R})$ ” UTMS 2009-10 としてまとめられた。

(B) 表現の行列係数関係： $SU(2, 2)$  の middle discrete series の極小  $K$ -type をもつ行列係数の漸近展開を、初等関数で明示的に書き下した（山形大学・早田孝博氏、三重大学・古関春隆氏との共同研究）。この論文は、Journal of Functional Analysis に投稿し出版された。

集会等：以下の集会のオーガナイザーを務めた。

(A) 野田モジュラー多様体研究集会、2009 年 12 月、東京理科大学・野田キャンパス

(B) 保型形式・保型表現およびそれに伴う L 関数と周期の研究、京都大学 RIMS 研究集会、2010 年 1 月

(C) 研究集会” Association scheme と数式処理”，2010 年 3 月、東京大学駒場キャンパス

また、9 月に代表者の還暦の記念の集会が、東京大学駒場、数理学研究科で行われた。

[月例セミナー]

2010年02月、河村隆(成蹊大学): 次数2のモジュラー群の基本領域における行列式の最小値; 早田孝博(山形大学・工学部): Siegel's fundamental domain of degree 2 and Groebner method.

2009年11月、岡崎武生(京都大学): On weak endoscopic lift; 井原健太郎(POSTEC): Derivations and Automorphisms on the noncommutative algebra of power series.

7月、大石亮子(高エネルギー加速器研究機構(KEK)): On some algebraic properties of CM-types of CM-fields and their reflexs; 織田孝幸:  $GL(n)$ の Whittaker 関数に関連する今後の問題.

6月、小池 健二(山梨大学教育人間科学部): 射影直線上の6点とI型領域上のテータ関数 射影直線上の6点とI型領域上のテータ関数; 成田宏秋氏(熊本大学理学部): Fourier coefficients of Arakawa lifting and some degree eight L-function.

5月、水野義紀(徳島大学工学部): 3次元上半空間のスペクトル理論とエルミート保型形式; 宮崎直(東京大学数理科学研究科): The Eisenstein series for  $GL(3, Z)$  induced from cusp forms.

[2010年度]

(a) 2009年の12月ごろから、古関春隆氏(三重大学)、早田孝博氏(山形大学)と $SU(3, 1)$ の大きな離散系列表現で極小 $K$ -型に属するものの動径成分の明示公式を求める努力をしていて、ほぼ結果が得られた。  
(b) Siegel 上半空間の、種数2の Siegel modular group  $Sp(2, \mathbb{Z})$  に関する基本領域の cell decomposition に関する研究が進展した(早田氏との共同研究)。

[月例セミナー]

5月、成田宏秋(熊本大学理学部数学教室): Strict positivity of the central values of some Rankin-Selberg L-functions; 山内卓也(大阪府立大学総合教育研究機構): 超幾何層に付随するカラビヤウ多様体とその応用について.

4月、宮崎直(東京農工大学):  $Sp(2, C)$  上の主系列 Whittaker 関数; 原下秀士(横浜国立大学): A paving of the Siegel 10-fold of positive characteristic.

[2011年度(繰越分)]

4月ロシア、サンクト・ペテルブルグの数式処理の集会で講演し、早田孝博氏(山形大学)との共同研究である、種数2のジーゲル・モジュラーの基本領域の 0-cell に関して研究成果を発表した。論文は出版予定

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

① T. Oda: Cohomology of Siegel modular varieties of genus 2 and corresponding automorphic forms, In "Geometry and analysis of automorphic forms of several variables", pp.211-254, ed. By Y. Hamahata, T. Ichikawa, A. Murase and T. Sugano: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2012.

② T. Hayata(早田孝博), Harutaka Koseki(古関春隆) and T. Oda: Matrix coefficients of the middle discrete series of  $SU(2, 2)$ , J. of Funct. Analysis, vol. 259, (2010), 301--307.

③ Miki Hirano(平野幹) and T. Oda: Calculus of principal series Whittaker functions on  $GL(3, C)$ , J. Funct. Analysis 256 (2009), 2222-2267.

④ T. Oda and J. Schwemer: On mixed Hodge structures of Shimura varieties attached to inner forms of the symplectic group of degree two, Tohoku Math. J. (2), 61 (2009), 83-113

⑤ Masatoshi Iida(飯田正敏) and T. Oda: Exact power series in the asymptotic expansion of the matrix coefficients with the corner  $K$ -type of  $P_J$ -principal series representations of  $Sp(2, R)$ , J. of Math. Sci., the Univ. of Tokyo 15 (2009), 512-543.

⑥ T. Oda and M. Tsuzuki(都築正男): The secondary spherical functions and Green currents associated with symmetric pairs (announcement of results), RIMS Kokyuroku Bessatsu B7 (2008), 121-135

⑦ T. Oda and Kazuki Hiroe(廣恵一希): Hecke-Siegel pull-back formula for the Epstein zeta function with harmonic polynomial", J. Number Theory 128 (2008), 835-857.

⑧ T. Oda, Miki Hirano(平野幹) and Taku Ishii(石井卓): "Whittaker functions for  $P_J$ -principal series representations of  $Sp(3, R)$ ", Adv. In Math., 215 (2007), 734-765.

[学会発表] (計 6 件)

① T. Oda: Zero cells of the Siegel-Gottschling fundamental domain of degree 2. The International Conference "Polynomial Computer Algebra", Euler International Mathematical Institute St. Petersburg, Russia, 2011 年 4 月

② T. Oda: Explicit formula of the matrix coefficients of the large discrete series of  $SU(3,1)$ . 国際研究集会、京都大学数理解析研究所, 2011 年 1 月

③ 織田孝幸: "小さな高階半単純 Lie 群上の特殊関数". Accessary Parameter 研究集会, 熊本大学理学部, 2010 年 3 月

④ T. Oda: Quest for more paths between analysis and geometry of automorphic forms on Hermitian domains, Workshop "Geometry and analysis of automorphic forms of many variables, 東京大学数理科学研究科, 2009 年 9 月

⑤ T. Oda: Explicit formulae for archimedean Whittaker functions on classical groups and related problems, Workshop "Representation theory of reductive groups -- local and global aspect", Erwin Schroedinger Intern. Inst. for Math. Physics, Wien, Austria, 2009 年 1 月

⑥ T. Oda: The secondary spherical functions and automorphic Green currents for certain symmetric pairs, International workshop "Automorphic forms", July 2007, St. Petersburg, Russia

[図書] (計 1 件)

Y. Hamahata, T. Ichikawa, A. Murase and T. Sugano: Geometry and analysis of automorphic forms of several variables, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2012. 研究集会記録

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

織田 孝幸 (ODA TAKAYUKI)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 10109415

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

石井 卓 (ISHII TAKU)  
成蹊大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 60406650

市川 尚志 (ICHIKAWA TAKASHI)  
佐賀大学・工学研究科・教授  
研究者番号: 20201923

伊吹山 知義 (IBUKIYAMA TOMOYOSHI)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 60011722

刈山 和利 (KARIYAMA KAZUTOSHI)  
尾道大学・経済情報学部・教授  
研究者番号: 20123713

古関 春隆 (KOSEKI HARUTAKA)  
三重大学・教育学部・教授  
研究者番号: 60234770

佐藤 文広 (SATO FUMIHIRO)  
立教大学理学部・教授  
研究者番号: 20120884

菅野 孝史 (SUGANO TAKASHI)  
金沢大学・理学部・教授  
研究者番号: 30183841

都築 正男 (TSUZUKI MASAO)  
上智大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 80296946

早田 孝博 (HAYATA TAKAHIRO)  
山形大学・工学部・助教  
研究者番号: 50312757

浜畑 芳紀 (HAMAHATA YOSHINORI)  
立命館大学・教授  
研究者番号: 90260645

平野 幹 (HIRANO MIKI)  
愛媛大学・大学院・理工学研究科・教授  
研究者番号: 80314946

広中 由美子 (HIRONAKA YUMIKO)  
早稲田大学・教育総合科学学術院・教授  
研究者番号：10153652

村瀬 篤 (MURASE ATSUSHI)  
京都産業大学・理工学部・教授  
研究者番号：40157772

渡部 隆夫 (WATANABE TAKAO)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：30201198