

平成 22 年 5 月 10 日現在

研究種目：基盤研究 (A)

研究期間：2007～2009

課題番号：19204003

研究課題名（和文）群とモジュライ空間の幾何学（2）

研究課題名（英文）Geometry of Groups and Moduli Spaces (2)

研究代表者

森田 茂之 (SHIGEYUKI MORITA)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70011674

研究成果の概要（和文）：リーマン面のモジュライ空間およびグラフのモジュライ空間、そしてそれらに同伴する、曲面の写像類群および自由群の自己同型群等のモジュラー群は、代数幾何学、複素解析学、微分幾何学、位相幾何学、数理物理学等、数学の多くの分野にまたがる極めて重要な研究対象である。本研究では、これらのモジュライ空間およびモジュラー群の、主として位相幾何学の観点からの研究を推進し、多くの成果を挙げた。また、密接に関連する3、4次元多様体論や横断的にシンプレクティックな葉層構造の特性類の理論においても、新しい結果や予想を得た。さらに数論を含む新しい方向への深い問題提起を行った。

研究成果の概要（英文）：The moduli space of Riemann surfaces and the moduli space of graphs, as well as their associated modular groups such as the mapping class groups of surfaces and the automorphism groups of free groups, are among the most important research subjects of diverse branches of mathematics including algebraic geometry, complex analysis, differential geometry, topology and mathematical physics. The present project investigated these moduli spaces and modular groups, mainly from the point of view of topology, and obtained many interesting results. Furthermore, we obtained new results as well as conjectures in the closely related theories of 3 and 4 dimensional manifolds and transversely symplectic foliations. We also proposed a deep problem towards new directions of our research including number theory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	5,700,000	1,710,000	7,410,000
2008年度	4,800,000	1,440,000	6,240,000
2009年度	4,800,000	1,440,000	6,240,000
年度			
年度			
総計	15,300,000	4,590,000	19,890,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：写像類群、リーマン面、モジュライ空間、グラフ、シンプレクティック幾何学、3次元多様体、4次元多様体、自由群

1. 研究開始当初の背景

リーマン面のモジュライ空間と曲面の写像類群のコホモロジー的構造については、これまでに多くの研究成果が積み重ねられて来ている。しかし、まだまだ未解明の課題が多く残されている。またリーマン面のモジュライ空間と深く関連するグラフのモジュライ空間と自由群の自己同型群については、本格的な研究はまだ初期の段階である。さらに、曲面の写像類群を大きく拡張する群として近年導入された、曲面上のホモロジー・シリンドラーのホモロジー同境界類全体のなす群は、3次元多様体論において基本的な役割をもつことが期待されているが、その構造の解明は、これからの位相幾何学の重要な研究テーマの一つである。本研究では、これらの群とモジュライ空間に関する課題の解明の推進を目指した。

2. 研究の目的

(1) リーマン面のモジュライ空間、グラフのモジュライ空間、およびそれらに同伴するモジュラー群のコホモロジー的構造の研究。とくに非安定特性類の性質の解明を目指す。

(2) 曲面のホモロジー群の生成する多項式代数、テンソル代数、自由リー代数、の3種類の代数のそれぞれにおいて、シンプレクティックな微分全体のなす無限次元リー代数の構造を解析する。とくに、これらのリー代数のアーベル化、およびコホモロジー群の構造を研究する。さらに、これらのコホモロジー類が誘導する、3、4次元多様体および絶対ガロア群等に関する、種々の不変量の非自明性や諸性質の解明を目指す。

(3) 上記で述べた方法、ゲージ理論、あるいは従来の幾何的トポロジーによる方法等、さまざまな手法により定義される、3次元および4次元多様体に関する種々の位相不変量の比較研究、およびそれらの性質の解明。

(4) 一般の微分同相群、あるいはシンプレクティック微分同相群、コンタクト微分同相群等、種々の幾何構造を保つ微分同相群の代数的および幾何的構造の解明。関連して、横断的にシンプレクティックな葉層構造の特性類の性質の解明を目指す。

3. 研究の方法

(1) 研究発表：本研究の研究代表者および数名の連携研究者は、2008年の3月から4月にかけて、デンマークのオーフス大学で開催された国際研究集会 “Finite type invariants, fat graphs and Torelli-Johnson-Morita theory” に参加し、研究発表を行うとともに、同集会に参加した海外の多くの研究者達と研究討論を行った。この国際研究集会のテーマは、そのタイトルが

示すように、本研究の研究代表者の理論に密接に関連するものであった。

(2) 研究集会：本研究の研究分担者（平成20年度以降は連携研究者）の北野晃朗は、他の連携研究者と共同で毎年度つぎに記すような研究集会を企画開催し、研究発表・研究討論を通して、研究の推進を計った。

① 平成19年12月20日-22日、Workshop on linear representations of the mapping class group and related topics、開催場所：高知、この研究集会には海外共同研究者である南カリフォルニア大学の R. Penner 教授も参加した。

② 平成20年11月12日-15日、Workshop on Geometry and Topology of Mapping Class Groups、開催場所：秋田、この研究集会には、マサチューセッツ工科大学の A. Putman 准教授も参加した。

③ 平成21年11月9日-12日、研究集会「微分・代数トポロジーの現在と未来」、開催場所：徳島

(3) 招聘および訪問：本研究の代表者は、平成21年10月海外共同研究者のミュンヘン大学の D. Kotschick 教授を訪問し、また平成22年2月には同教授を東京大学大学院数理科学研究科に招聘して、本研究の研究課題の一つである横断的にシンプレクティックな葉層構造の特性類の研究を推進した。また同時期に、海外共同研究者の R. Penner 教授を同じく東京大学大学院数理科学研究科に招聘して、リーマン面のモジュライ空間に関する共同研究を行った。

(4) 本研究の連携研究者の三松佳彦は、専門の異なる分野の研究者も含めたセミナーを定期的に開催し、本研究の広い視野からの発展に努めた。

(5) 本研究の補助および後進の育成のため、博士号を有する若手の研究者を雇用了。

4. 研究成果

(1) 本研究の代表者は、これまでの研究で曲面のホモロジー群の生成する自由リー代数のシンプレクティックな微分全体のなす無限次元リー代数のアーベル化を与える森田トレースと呼ばれる一連の準同型写像を定義した。この準同型写像の群バージョンを、曲面の基本群のマルツェフ完備化の自己同型群に対して適用することにより、ある種の4次元位相多様体に関する無限個の不変量を定義した。さらに、これらの不変量が、ホモロジー3球面のホモロジー同境界類全体のなす無限階数のアーベル群の転入像となっているのではないか、という予想を提出した。

(2) 研究分担者・連携研究者の河澄響矢と秋田利之は、リーマン面のモジュライ空間の Mumford-Morita-Miller 類に関する秋田予想

について、ある条件のもとでの肯定的な証明を得た。

(3) 研究分担者・連携研究者の北野晃朗、森藤孝之、鈴木正明は、結び目および3次元多様体に対して定義される、ねじれ Alexander 多項式、 L^2 -トーション、等の不変量について多くの結果を得た。

(4) 研究代表者は連携研究者の鈴木正明、逆井卓也と共同で、曲面のホモロジー群の生成するテンソル代数のシンプレクティックな微分全体のなす無限次元リー代数のアーベル化、および自由リー代数の微分全体のなす無限次元リー代数に関する同様の問題について研究し、種数あるいは階数が小さな場合についてコンピュータによる具体的な計算を行った。そして、それを基に、アーベル化の形に関する予想を定式化した。

(5) 研究代表者は、海外共同研究者の D. Kotschick 教授と共同で、横断的にシンプレクティックな葉層構造の特性類の研究を行い、Gel'fand-Kalinin-Fuks 類が、ある5次元の葉層コホモロジー類と横断的面積要素との積に分解することを証明した。さらに、Kontsevich の与えた枠組みと、形式的ハミルトン・ベクトル場全体のなすリー代数のゲルファンツ・フックス・コホモロジー理論との間の関係を明らかにした。

(6) 本研究の研究分担者の古田幹雄は、共同研究者と共に、ゲージ理論の研究を推進し、非線形 Fredholm 理論を発展させた。また、トラス束の局所化を研究し、量子化予想の別証を得た。

(7) 本研究の研究分担者・連携研究者の坪井俊は、実解析的微分同相群を初め、種々の構造を保つ微分同相群の完全性および一様完全性について、基本的な結果を得た。

(8) 研究代表者は、上記の曲面のホモロジー群の生成する自由リー代数のシンプレクティックな微分全体のなす無限次元リー代数において、絶対ガロア群の像となることを予想している一連の元について、種数1の場合への射影公式を得た。また、初めの2元についてコンピュータによる具体的な計算を実行し、明示的な式を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① Takayuki Morifuji, On a secondary invariant of the hyperelliptic mapping class group, Algebraic Topology – Old and

New -, 査読有、Banach Center Publ. 85 (2009), 83-92

② Hiroki Kodama, Yoshihiko Mitsumatsu, Shigeaki Miyoshi, Atsuhide

Mori, On Thurston's inequality for apinnable foliations, Contemporary Math. , 査読有、 498 (2009), 173-193

③ Shigeyuki Morita, Symplectic automorphism groups of nilpotent quotients of fundamental groups of surfaces, Adv. Stud. In Pure Math. , 査読有、 52 (2008), 443-468

④ Masaaki Suzuki, New examples of elements in the kernel of the Magnus representation of the Torelli group, Adv. Stud. in Pure Math. , 査読有、 52 (2008), 479-490

⑤ Toshiyuki Akita and Nariya Kawazumi, Integral Riemann-Roch formulae for cyclic subgroups of mapping class groups, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. , 査読有、 144 (2008), 411-421

⑥ Teruaki Kitano and Masaaki Suzuki, A partial order in the Knot Table II, Acta Mathematica Sinica, 査読有、 24 (2008), 1801-181

⑦ Takuya Sakasai, The Magnus representation and higher-order Alexander invariants for homology cobordisms of surfaces, Algebraic and Geometric Topology, 査読有、 8 (2008), 803-848

[学会発表] (計14件)

① 逆井卓也, The Magnus representation and homology cobordism groups of homology cylinders, 2010日本数学会年会、トポロジー分科会、平成22年3月24日、慶応義塾大学

- ② 古田幹雄、局所化とトーラス束、2010日本数学会年会、企画特別講演、平成22年3月24日、慶応義塾大学
- ③ 北野晃朗、A partial order on the set of prime knots、The 6-th Asian School of Knots and Related Topics、Chern 研究所、平成22年1月26日、中国
- ④ 三松佳彦、Turbulizations of 2-dimensional foliations of 4-manifolds and Anosov flows on 3-manifolds、研究集会“Foliations and Groups of Diffeomorphisms”、平成21年10月27日、東京大学丹原国際セミナーハウス
- ⑤ 森田茂之、シンプレクティック幾何学と低次元トポロジーの新しい不変量、名古屋大学大学院多元数理科学研究科談話会、平成21年5月20日、名古屋大学
- ⑥ 森田茂之、Higher symplectic pairings and invariants in low dimensional topology、日仏科学フォーラム、平成20年10月7日、東京大学大学院数理科学研究科
- ⑦ 森田茂之、Automorphism groups of nilpotent quotients of fundamental groups of surfaces and homology cobordisms of 3-manifolds、International workshop “Finite type invariants, fat graphs and Torelli-Johnson-Morita theory”、平成20年3月26日、デンマーク オーフス大学
- ⑧ 森田茂之、京都大学大学院理学研究科大談話会、Construction of geometric invariants by symplectic representations、平成19年11月14日、京都大学
- ⑨ 森田茂之、曲面の写像類群を巡って、日本数学会秋季総合分科会、幾何学・トポロジー分科会合同特別講演(日本数学会幾何学賞受賞特別講演)、平成19年9月21日、東北大学
- ⑩ 北野晃朗、 L^2 torsion invariants of a surface bundle over the circle、Braids in Paris、パリ第7大学、平成19年9月18日、フランス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森田 茂之 (MORITA SHIGEYUKI)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号：70011674

(2) 研究分担者

古田 幹雄 (FURUTA MIKIO)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号：50181459
 平成19-20年度
 (平成21年度連携研究者に移行)
 坪井 俊 (TSUBOI TAKASHI)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号：40114566
 河野 俊丈 (KOHNO TOSHITAKE)
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授
 研究者番号：80144111
 平成19年度
 (平成20年度以降連携研究者に移行)
 河澄 響矢 (KAWAZUMI NARIYA)
 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
 研究者番号：30214646
 松本 真 (MATSUMOTO MAKOTO)
 広島大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号：70231602
 三松 佳彦 (MITSUMATSU YOSHIHIKO)
 中央大学・理工学部・教授
 研究者番号：70190725
 北野 晃朗 (KITANO TERUAKI)
 創価大学・工学部・教授
 研究者番号：90272658
 藤原 耕二 (FUJIWARA KOJI)
 東北大学・大学院情報科学研究科・教授
 研究者番号：60229078
 村上 順 (MURAKAMI JUN)
 早稲田大学・理工学術院・教授
 研究者番号：90157751
 秋田 利之 (AKITA TOSHIYUKI)

北海道大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30279252
廣瀬 進 (HIROSE SUSUMU)
佐賀大学・理工学部・准教授
研究者番号：10264144

(3) 連携研究者

平成 20-21 年度
森藤 孝之 (MORIFUJI TAKAYUKI)
東京農工大学・准教授
研究者番号：90334466
鈴木 正明 (SUZUKI MASA AKI)
秋田大学・教育文化学部・准教授
研究者番号：70431616
平成 21 年度
笠原 泰 (KASAHARA YASUSHI)
高知工科大学・准教授
研究者番号：80299370
逆井 卓也 (SAKASAI TAKUYA)
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：60451902

(4) 海外共同研究者

DIETER KOTSCHICK
ドイツ・ミュンヘン大学・教授
ROBERT PENNER
米国・南カリフォルニア大学・教授