

機関番号：14401

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2007～2010

課題番号：19204005

研究課題名（和文） 特異点をもつ曲線と曲面の幾何学

研究課題名（英文） Geometry of curves and surfaces with singularities

研究代表者

梅原 雅顕（UMEHARA MASAOKI）

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90193945

研究成果の概要（和文）：特異点をもつ曲線と曲面の幾何学について，研究を行い，以下のような成果をおさめた。

曲面あるいは超曲面にもっとも頻繁に現れる A 型の特異点の判定法を与え，これを変曲点の研究に応用した．またこの特異点の判定条件に立脚し，曲面から多様体の概念が生まれたように，外の空間を払拭して，内的に波面を記述する概念として接続接束の概念を樹立し，多くの応用を与えた．一方，この研究に関連し，3次元時空の極大曲面，3次元ド・ジッター空間の平均曲率1の曲面について，特異点を許すが，ある種の完備性をもつ興味深い曲面の例を数多く構成した．また研究分担者と協力し，国内外で関連する研究者等との研究交流を図る研究集会をいくつか開催した。

研究成果の概要（英文）：This research was focused on the geometry of curves and surfaces with singularities. We gave a useful criterion for  $A_k$  singular points on hypersurfaces, and applied it to the study of inflection points on hypersurfaces. This criterion enabled us to define  $A_k$  singularities of wave front without assuming the existence of an ambient space. In fact, we defined the notion “coherent tangent bundle”, giving an intrinsic formulation for wave fronts and several other applications. Moreover, we investigated maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space and constant mean curvature surfaces in de Sitter space, and constructed several interesting new examples with singularities but still having certain kind of completeness.

Additionally, the head investigator and coinvestigators held several workshops (both domestic and international), which related in many fruitful discussions with geometers studying relating fields.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	6,300,000	1,890,000	8,190,000
2008年度	5,800,000	1,740,000	7,540,000
2009年度	5,800,000	1,740,000	7,540,000
2010年度	0	0	0
年度			
総計	17,900,000	5,370,000	23,270,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何，ガウス曲率，平均曲率，波面，特異点

1. 研究開始当初の背景

| 90年代前半の山田氏との3次元双曲型空

間の平均曲率一定曲面の論文と同様に、3次元双曲型空間の平坦な曲面（ガウス曲率が零の曲面）にも同じ手法でエンドの解析ができることを Galvez, Martinez と Milan が3人の共同研究で示しました(2000年).しかし、このような平坦な曲面で完備なものは測地線のチューブかホロ球しかないことが知られており、大域的な議論ができないと思われておりましたが、國分、山田と筆者の研究により、波面としての特異点を許すと数多くの例が存在し、完備性なども自然に定義され、3次元双曲型空間の平均曲率1の曲面の類似が示せることを明らかにしました.特に、國分、佐治、ラスマン、山田との共著論文で、カスプ辺とツバメの尾の便利な判定条件を与えましたが、これが最近の筆者の特異点をもつ曲面の研究の発端となるものでした.

## 2. 研究の目的

筆者のこれまでの研究を発展させて、以下の4つのテーマについて研究を行う.

- (1) 特異点を対象とする微分幾何学の構築,
- (2) 定曲率空間における波面の特異点と位相に関する研究, およびその関連分野への応用,
- (3) ユークリッド空間および双曲型空間における完備かつ有界な極小曲面の研究,
- (4) 特異点をもつ平面あるいは空間曲線の微分幾何学の構築.

特に、本研究では、特異点自体に曲率を導入し、微分幾何学的な対象として研究することを最終的な目標としている.

## 3. 研究の方法

(1) 特異点上の微分幾何学の構築に関する研究については、代表者および山田が、高次元ユークリッド空間の超曲面に現れる特異点が  $A_k$  型となるための有用な判定条件を、特異点論に精通している研究協力者の佐治氏と、分担者の阿賀岡と連携し、普遍開折を構成することにより与える. 係数体が複素数体の場合には、複素幾何に精通している分担者の榎、後藤、満洲等と連携して、同様の判定条件を与える. また、代表者は、分担者の小磯、宮岡の協力のもと、上の分類に現れる特異点の微分幾何学的な形状の解析を行う.

(2) 定曲率空間における波面の特異点と位相に関する研究については、以下のように研究を行う.

①代表者および分担者の國分が、分担者のラスマンの協力のもと、エンドのホロ球による断面図形の漸近挙動について研究する. 具体例の構成は、群作用に精通している分担者の橋本、間下と協力して行う.

②3次元ド・ジッター空間の平均曲率1の曲面については、研究分担者の藤森の協力のもと研究を行う. さらに研究協力者の

Seong-Deog Yang 氏(韓国・高麗大学)も日本に招聘し、研究代表者が、分担者の山田、ラスマンそして関数論および可積分系に詳しい宮岡と連携し、Osserman 型の不等式を含む基礎的な理論の構築をめざす.

③研究代表者は3次元ユークリッド空間の正則曲線の生成する平坦なメビウスの帯について、中心線が測地線あるいは曲率線を与える、という制約のもと、実現可能な位相型について研究を行う. また、同時に、与えられた長さの埋め込まれた平坦なメビウス帯の最大幅の問題や、帯の幅を延長したときにできる特異点の形状解析をラスマンの協力のもとで行う.

(3) ユークリッド空間および双曲型空間における完備かつ有界な極小曲面の研究については、代表者および研究協力者の Martin (スペイン・グラナダ大) と山田が研究を行う. 一方、分担者の山田、宮岡、間下、橋本等とそれぞれ連携し、研究会を共同して開催し、研究の活性化と、研究交流を推進する.

(4) 特異点をもつ平面あるいは空間曲線の微分幾何学の構築について、代表者は、平面曲線の変曲点、曲率関数の臨界点の個数や、ある種の2次曲線の族によって過剰に近似される点について研究する. またカスプ点と変曲点との関係についても調べる.

## 4. 研究成果

(1) 特異点上の微分幾何学の構築に関する研究については以下の成果を得た.

① 分担者の山田と佐治氏(岐阜大学教育学部)との共同研究で  $A_k$  型の特異点の判定条件を与え、その発展として超曲面の  $A_k$  型の変曲点と同じ型の特異点との間の双対性に関する研究を行なった. また、その応用として、3次元 Euclid 空間内において、はめ込まれた超曲面の2次の変曲点に関する Bleeker-Wilson の公式を、射影空間における同種の公式に一般化した.

② 分担者の山田と佐治氏と、多様体上のベクトル束と接続の概念を用いて接続接束を定義し、波面の内的な定式化を与えた. さらにその定曲率空間への超曲面としての実現定理を与えた. また上述の「特異点と変曲点」の間の双対性を、内的に再定式化し、閉曲面としての波面に合計4個のガウス・ボンネ型の定理の存在を示した. これらの公式は特異点をもたない閉曲面に対しても新しい結果をもたらす. 例えば、曲面のガウス曲率が負の部分のオイラー数や全曲率を、その曲面のガウス写像の特異点に関する幾何学的な不変量を用いて表すことが可能となった.

(2) 定曲率空間における波面の特異点と位相に関する研究については以下の成果を得

た。

① 大阪大学理学研究科修士学生の黒野君との研究で、3次元ユークリッド空間の平坦なメビウスの帯で、中心線が測地線に保ったまま（あるいは、中心線が曲率線であることを保ったまま）、任意のイソトピー型を実現できることを示した。

② 分担者の山田，ラスマン，藤森そして研究協力者の Yang 氏とド・ジッター空間における平均曲率1の曲面の研究を行い，ある種の完備性をもつ場合に Osserman 型の不等式が成り立ち，等号条件はエンドが自己交叉しないことと同値であることを示した。

③ 連携研究者の國分および分担者の山田と共に，3次元時空の極大曲面および3次元ド・ジッター空間の平均曲率1の曲面に，ある種の特異点を許したとき，向き付け可能性，完備性，弱完備性について相互の関係を明らかにした．特に3次元球面において，平坦で弱完備なほめ込みで完備でない例を発見し，特異点がなくとも完備性と弱完備性の間には差異があることが判明した。

④ 連携研究者の藤森，ラスマン，研究協力者の Yang 氏，および分担者の山田と共に上述の3次元時空の極大曲面の完備性と弱完備性に関連する研究として，完備かつ充分遠方で自己交叉をもたない種数1の新しい極大曲面と，円錐的特異点とカusp辺を同時に保有する完備な極大曲面の初めての例の構成を行った。

(3) ユークリッド空間および双曲型空間における完備かつ有界な極小曲面の研究については，分担者の山田，研究協力者の Martin 氏と共同で，以前に3人の共著論文で与えた単連結かつ虚部も同時に有界な極小曲面を摂動して，2次元複素線形空間に完備かつ有界な任意種数の1次元複素部分多様体の構成および，3次元時空に弱完備かつ有界な任意種数の極大曲面が存在することを示した。

(4) 特異点をもつ平面あるいは空間曲線の微分幾何学の構築については，研究代表者は数回，ケルン大学を訪問し，研究協力者の Thorbergsson 氏と，平面曲線の2次以上の代数曲線による近似によって生ずる高次の頂点の個数の下からの評価に関する新手法について研究討論を行った。

また，研究代表者は分担者の山田，間下，橋本等と適宜連携して，それぞれ毎年度9月，11月，3月に研究集会を開催し，この研究テーマに関する研究者同士の研究連絡や研究交流を行った．また研究代表者は

Dorfmeister 氏，Abresch 氏等と一緒にドイツの Oberwolfach 数学研究所において，曲面と可積分系に関する研究会を主催し，本研究テーマに関する講演を行った。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

① S. Murata and M. Umehara, Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space, *Journal of Differential Geometry* 82 (2009) 279–316, 査読有り.

② F. Martin, M. Umehara and K. Yamada, Complete bounded null curves immersed in  $C^3$  and  $PSL(2, C)$ , *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 36 (2009) 119–139, 査読有り.

③ K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, Ak singularities of wave fronts, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 146 (2009) 731–746, 査読有り.

④ K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, The geometry of fronts, *Ann. of Math.* 169 (2009) 491–529, 査読有り.

⑤ S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, Singularities of maximal surfaces, *Math. Z.* 259 (2008) 827–848, 査読有り.

⑥ G. Thorbergsson and M. Umehara, Inflection points and double tangents on anti-convex curves in the real projective plane, *Tohoku Mathematical Journal* 60 (2008) 149–181, 査読有り.

[学会発表] (計1件)

① 梅原 雅顕，波面の幾何学—その内的双対性と Gauss-Bonnet の定理への応用—，日本数学会 2010 年度年会・企画特別講演，2010. 3. 26 (Fri). 13:00–14:00 (慶應義塾大学・理工学部)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

梅原 雅顕 (UMEHARA MASA AKI)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：90193945

### (2) 研究分担者

山田 光太郎 (YAMADA KOTARO)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：10221657

橋本 英哉 (HASHIMOTO HIDEYA)  
名城大学・理工学部・教授

研究者番号：60218419

間下 克哉 (MASHIMO KATSUYA)  
法政大学・理工学部・教授  
研究者番号：50157187

満渕 俊樹 (MABUCHI TOSHIKI)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：80116102  
(平成20年から分担者に追加)

小磯 憲史 (KOISO NORIHITO)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：70116028  
(平成20年から連携研究者に変更)

後藤 竜司 (GOTO RYUSHI)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：30252571  
(平成20年から連携研究者に変更)

榎 一郎 (ENOKI ICHIRO)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：20146806  
(平成20年から連携研究者に変更)

Rossmann W. F. (ROSSMAN W. F.)  
神戸大学・理学部・教授  
研究者番号：50288485  
(平成20年から連携研究者に変更)

宮岡 礼子 (MIYAOKA REIKO)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：70108182  
(平成20年から連携研究者に変更)

國分 雅敏 (KOKUBU MASATOSHI)  
東京電機大学・工学部・教授  
研究者番号：50287439  
(平成20年から連携研究者に変更)

藤森 祥一 (FUJIMORI SHOICHI)  
福岡教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号：00452706  
(平成20年から連携研究者に変更)

阿賀岡 芳夫 (AGAOKA YOSHIO)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：50192894  
(平成20年から連携研究者に変更)