

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2007 ～ 2010

課題番号：19204008

研究課題名(和文) 計算による数理科学の展開

研究課題名(英文) Computational Approaches for Mathematical Sciences

研究代表者 高山信毅 (TAKAYAMA NOBUKI)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：30188099

研究成果の概要(和文)：

第10回 Asian Logic Conference および 第3回国際数学ソフトウェア会議を開催し、計算と数理科学に関する研究コミュニティに広く寄与した。多くの研究成果が得られたが、ホロノミック系に対する計算代数アルゴリズムおよび数値解析法の研究を基礎としてホロノミック関数の局所最小値を求めるアルゴリズムを得たことはこのプロジェクトがなかったら生まれなかったといえる特筆すべき結果である。統計的推定問題への応用が見込まれており新プロジェクトで研究が進行している。

研究成果の概要(英文)：

We hosted the 10th Asian logic conference and the third international congress on mathematical software and made broad contributions to communities to study computation and mathematical sciences. We have obtained several results. Among them, a result which could not be obtained without this project is an algorithm to find a local minimum of a given holonomic function by utilizing computer algebra algorithms and numerical algorithms for holonomic systems. We expect that this method can be applied to estimation problems in statistics, which is in progress in a new project.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	8,500,000	2,550,000	11,050,000
2008年度	7,600,000	2,280,000	9,880,000
2009年度	7,900,000	2,370,000	10,270,000
2010年度	8,600,000	2,580,000	11,180,000
年度			
総計	32,600,000	9,780,000	42,380,000

研究分野：計算数学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論, 統計学)

キーワード：グレブナ基底, 推定, 数学ソフトウェア, 特殊関数, 組み合わせ論的集合論, 重複対数の法則, 中心極限定理, 極小曲面.

1. 研究開始当初の背景

次節で述べる 研究目的の目標を念頭において国内外のプロジェクトで我々に関係が深いものに (a) 「代数幾何の応用」

(<http://www.ima.umn.edu>) (b) 「第2回国際数学ソフトウェア会議」

(<http://www.icms2006.unican.es>) (c) 2006年度数理解析研究所特別研究プロジェクト「グレブナ基底の理論的実践の有効性」などがある。研究代表者の高山はこれらのプロジェクトに深くかかわってきた。このプロジェクトはこれらのプロジェクトの日本における後継と位置づけることが可能である。

2. 研究の目的

“計算による数理科学の展開”の目標は以下の標語に集約される：

(A) 計算の効用とともにその限界を明らかにしていくこと

(B) 計算と数学、計算と数理科学への応用、の動的干渉を促進しフロンティアを開拓していくこと

研究方法のところで述べるように、我々の研究方法の柱は (1) 長い伝統に根ざした深く堅実な研究の支援、および、(2) 計算と数学、計算と数理科学への応用の動的干渉およびフロンティアの開拓である。

(1) については 数学の自律的堅実的伝統的発展を 支援することであり、目標 (A), (B) の達成には地味ながら不可欠である。本研究課題の各分野(数式処理、微分方程式、確率論、統計学、微分幾何、数理論理学) の分担研究者が、その専門性と見識により責任をもち各種研究を支援する。

(2) については研究の進展に応じてダイナミックな展開が予想されるが、研究当初において目標例としてあげたことを記しておく。

“申請者が長く研究してきた 微分作用素環の計算代数的方法(計算D-加群の方法)を援用した多重積分の数値解析 は今後、数学、数値解析だけでなく統計学などへの応用も試みられるであろう。また特異点解消アルゴリズムの応用も関係してくるはずである。論理学については 今まで数学的対象に留まっていた計算可能性、証明可能性の概念が実際に計算機上で機能するものにしていきたい。”

計算の方法は、われわれの教育カリキュラムも大きく変更しつつある。たとえばグレブナ基底の方法は数学専攻の代数のカリキュラムに大きな影響を与え、またいままで代数的手法に一般的には親しんでこなかった工学系学生や研究者に 代数的手法を広める原動力となっている。このような方向性は他の諸分野でも進んでいくはずであり、このプロジェクトでは チュートリアルやそのビデオアーカイブ、本の出版などを通して寄与していく予定である。

最後に全体をむすぶ糸として数学ソフトウェアの開発/集積をすすめていきたい。

3. 研究の方法

このプロジェクトでは 研究目的に述べた先駆的な3プロジェクトを継承発展し、

1. トピックを決めた短期のチュートリアル
2. 国内研究集会
3. 国際研究集会
4. ソフトウェアやビデオアーカイブの集積と出版

などを行う。

我々の研究方法の柱は (1) 長い伝統に根ざした深く堅実な研究の支援、および、(2) 計算と数学、計算と数理科学への応用の動的干渉およびフロンティアの開拓である。

国内研究集会として、"計算による数理論理学の展開"(2日間)を毎年開催する。

knoppix-math.org の数学ソフトウェア集積と出版には全面的に協力し、毎年成果 DVD を出版し、日本数学会や関連国際会議等で配布する。また数学会で濱田(福岡大学)、野呂(分担者)、高山(代表者)が"フリーソフトとフリードキュメント"シリーズを開催してきているがこれを継続し、主たるスポンサーとなる。

2008年度は、"アジア論理学会議"を神戸大学で開催する。アジア論理学会議はアジア地域における数理論理学の最高峰の国際会議である。

2010年度は第3回国際数学ソフトウェア会議を主催する。国際数学ソフトウェア会議は、数学ソフトウェアの最高峰の国際会議である。招待講演者にはチュートリアルもお願いする予定。

上記研究集会や附属するチュートリアルの資料やビデオをひろく公開する。

4. 研究成果

目標 (B) および (2) に関して次のような成果を得たのは特筆すべき成果である (図 1)。

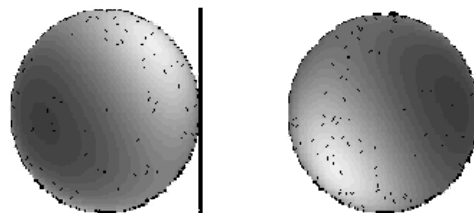
(a)ホロノミック系の数値計算手法の研究を基礎として、ホロノミック関数の局所最小値を求める数式数値融合計算アルゴリズム(ホロノミック勾配降下法)を得た。

(b)方向統計学に現れる Fisher-Bingham 分布のパラメータ推定問題にこのアルゴリズムを適用した。現在他のさまざまな分布に対する同様の研究が進展中である。

(a)はこの研究の基礎研究の結果として得られていたが、応用は不明であった。それが申請者が参加している crest 研究(新プロジェクトとよぶ)で応用として展開して (b) が得られたことを記しておく。研究当初のフロン

ティア開拓という目標が達成されたこととなる。)これは統計とは全く無関係とされていた D 加群の種々のアルゴリズムが、統計における指数型分布族の基準化定数の計算や最尤推定量の計算のための全く新しい汎用的な方法に至る見通しが得られたものである。定理の形でまとめると、" \mathbf{R}^m の上の指数型分布族の基準化定数はホロノミック関数であり、その勾配とヘッシアンは付随するグレブナ基底の有限個の標準単項式をそのホロノミック関数に作用させたもので書ける。またその表現を具体的に計算するアルゴリズムがある。"となる。個別の問題についてはそれぞれに応じた工夫をすることが必要であり、これらは今後 の課題である。

図 1: Fisher-Bingham 分布による星の分布の推定



2008年は国際研究集会 10th Asian Logic

Conference を開催し国際的に有力な研究者の活発な研究発表と討論を促し、研究の進展と萌芽の促成に寄与した。特に自動証明に関する研究発表が本来論理学に遠い分野の若手研究者に与えた影響は実に大きく数学全体における論理に対する理解の促進に大いに寄与したといえる。□2010年には計算と数学に関する総合的研究集会 "第三回国際数学ソフトウェア会議" (icms2010, 2010年9月) を主催し、この分野の進展をはかった。特にこの研究集会に付随して編集出版したプロシーディングスは 数学ソフトウェア開発の現状と将来の課題に関する総合的報告であり この分野の

里程標となることが期待される。また両国際集会では一流の研究者によるチュートリアルも開催した。□数学ソフトウェアと関連する文書の整理集積事業をおこない、成果は KNOPPIX/Math DVD として毎年公開している。これには計算代数システム Risa/Asir に実装した各種研究成果も含まれる。□毎年1月に国内研究集会 “計算による数理科学の展開” を開催し、分野横断的な議論やチュートリアル講演をおこなった。

次に目的 (1) の特定分野における研究の進展の各論を述べる。

[数理論理学, 集合論] 渕野は Fodor-type Reflection Principle (FRP) とその拡張の下で成立する位相空間論での定理についての研究をさらに進めた。ベン・グリオン大学 (イスラエル) の Assaf Rinot 氏との共同研究で、渕野による1994年の研究結果における openly generated なブール代数に関する consistency result での命題が、Fodor-type reflection principle (FRP) と (ZFC 上で) 同値になることが示された。この証明では、FRP が、Singular Cardinal Hypothesis (SCH) の拡張となっている Shelah's Strong Hypothesis (SSH) を導く、という新しい結果を、本質的に使うものとなっている。後者の結果により、目標の一つであったFRP の $\aleph_{\omega+1}$ での combinatorics の検証をはるかに越えて、FRP の singular cardinals での無限組合せ論への影響に関する理解を大きく深めることができた、と言える。□また、FRP と同値な組合せ原理の探求の過程で得られた、無限グラフの coloring number の特徴付けを用いて、unit distance plane graph の coloring number が \aleph_0 であることを決定できた。証明自身は trivial ではあるが、文献を調べたかぎりでは、新しい結

果であるように思える。□Brendle らは連続体とその部分集合を組合せ論的集合論や記述集合論の観点から調べた。特に、自然数全体の集合 ω のベキ集合 $P(\omega)$ を自然数上の定義可能なイデアル I で割った商集合であるブール代数 $P(\omega)/I$ などの、集合論における商構造の組合せ論的性質に焦点を絞って研究を行った。結果は多岐にわたるが、たとえば \mathcal{F}_σ イデアルによる商に付随する基数不変量の大小関係について独立性結果を示した。□新井が大きい (可算) 集合に関する公理系がある関数の繰り返しで近似できることを示したことは特筆に値する業績である。

[確率論] 福山は間隙級数の手法を用いて、乱数の検定にも使われる discrepancy の漸近挙動の研究をおもに行った。数値積分法において乱数に使われるのはいわゆる低 discrepancy 列であるが、我々は理論的な興味から乱数に向かない高 discrepancy 列についてその重複対数の法則を示し、現れる定数を検討することにより数値積分への応用不適性能を数値化して特徴づけることを推進している。□また有界間隙級数の中心極限定理について研究した。中心極限定理は確率論の中心たる極限定理という意味で Pólya の命名による。典型的な場合を述べると、平均 0 で分散 σ^2 が有限な独立同分布確率変数列 $\{X_n\}$ に対して

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_m}{\sqrt{m}} \leq a\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^a e^{-u^2/2\sigma^2} du \quad (m \rightarrow \infty)$$

であるが、必ずしも独立でなくてもこのことが成立することは良く知られている。

(1)

$$\text{Leb}\left\{x \in [0,1] \mid \frac{\cos 2\pi n_1 x + \dots + \cos 2\pi n_m x}{\sqrt{m}} \leq a\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^a e^{-u^2/2\sigma^2} du$$

例えば自然数の単調増大列 $\{n_k\}$ の発散が速い時に 以下が $\sigma^2 = 1/2$ に対して示される。有界な間隙 $n_{k+1} - n_k < L$ をもつ列で 中心極限定理が成り立つものがあるか、ということが問題になる。最近 Bobkov-Götze (2007) は (1) が成り立つとすると、

$\sigma^2 \leq (1 - \limsup k/n_k)/2$ でなければならぬことを示した。もし、 $n_{k+1} - n_k < L$ が成り立つならば、 $n_k \leq Lk + c$ となり、

$\sigma^2 \leq (1 - 1/L)/2$ となってしまう、これまでの定理と同様に (1) が $\sigma^2 = 1/2$ に対して成り立つことはない というのである。有界な間隙列はその分散を必ず一部失ってしまうという 驚くべき事実が判明した。

しかしながら、たとえ分散を一部失うとしても (1) が成り立つ場合があるかという問題は依然未解決で残っている。

この問題を研究し、有界間隙列で中心極限定理に従うものが存在することを示した。

[統計] 垣内は3つのパラメータをもつ特殊容量により定義される分布近傍を導入し、その下でのノンパラメトリックロバスト推測理論の研究、および グラフィカルモデリング理論における併合可能性についての研究を行った。

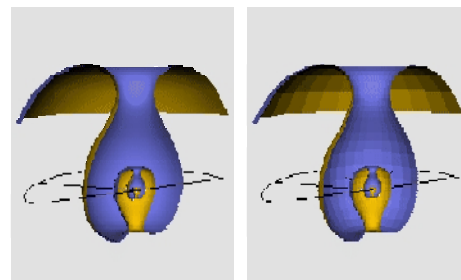
[計算代数] 野呂は主としてイデアルの準素分解アルゴリズムの研究を行った。まず、**separating ideal** という概念を導入し、これを用いた、冗長成分を発生しにくい準素分解アルゴリズムを考案した。実際にこのアルゴリズムにより既存の方法では分解困難なイデアルをいくつか分解することに 成功した。その後、このアルゴリズムが効率よくイデアルを分解できる理由を 探るうち、**saturated separating ideal** という概念に到達した。これにより、冗長成分がまったく発生しないアルゴリズムを発見した。さらに、中間的な分解を経由することにより、格段に効率がよいアルゴリズム (SYCI アルゴリズム) を発見し

た。このアルゴリズムを Risa/Asir, Macaulay2, Singular 上で実装し、既存の方法では分解困難な数多くのイデアルを、効率よく分解できることを実証した。

[特殊関数, 可積分系] 野海は楕円関数を係数とする差分作用素の可換族とその固有函数の理解に向けての研究を行った。とくに BC 型の場合に、Selberg 型楕円超幾何積分の拡張を与えるような、積分変換から生じる固有函数のクラスがあることを見いだした。□高山はNew bateman project による特殊関数の5巻本の中の A-超幾何関数の章の原稿執筆に 多くの時間を費やした。

[微分幾何] Rossman は曲面理論の微分幾何学的性質をもつような離散化をより深く理解することを試みた (図 2)。滑らかな曲面理論の場合に様々な数学的な構造があり(特に、isothermicの概念や、Christoffel 変換やCalapso 変換, Darboux変換, Baecklund変換), その滑らかな場合の 構造を離散的な場合にも持つような離散化のしかたを調べた。

図 2: 対称性をもっている isothermic な曲面, 滑らかな場合と その離散版



5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 78 件)

①H. Nakayama, K. Nishiyama, M. Noro, K. Ohara, T. Sei, N. Takayama, A. Takemura,

Holonomic Gradient Descent and its
Application to the Fisher-Bingham Integral,
Advances in Applied Mathematics (2011), to
appear. doi:10.1016/j.aam.2011.03.001

②K. Ohara, N. Takayama, Holonomic Rank of
A-Hypergeometric Differential-Difference
Equations, Journal of Pure and Applied
Algebra, 213 (2009) 1536-1544.

③F. J. Castro-Jimenez, N. Takayama, The
Computation of the Logarithmic Cohomology
for Plane Curves, Journal of Algebra, 322
(2009), 3839-3851

[学会発表] (計 93 件)

④N. Takayama, Holonomic gradient descent
and its application to Fisher-Bingham
integral, The second crest-sbm
international conference ``Harmony of
Groebner bases and the modern industrial
society'', 大阪, 2010年06月30日.

[図書] (計 2 件)

①M. Joswig, K. Fukuda, J. Van der Hoeven,
N. Takayama 編集, Mathematical Software --
ICMS 2010 Third International Congress on
Mathematica Software, Kobe, Japan,
September 13-17, 2010. Preceedings,
Springer Lecture Notes in Computer Science
6327.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/cm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高山信毅 (TAKAYAMA NOBUKI)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号: 30188099

(2) 研究分担者

Brendle, Joerg (BRENDLE JOERG)

神戸大学・システム情報学研究科・准教授

研究者番号: 70301851

淵野 昌 (FUCHINO SAKAE)

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号: 30292098 (H21 新規参加)

福山 克司 (FUKUYAMA KATSUSHI)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号: 60218956

垣内 逸郎 (KAKIUCHI ITSURO)

神戸大学・システム情報学研究科・准教授

研究者番号: 90091248

野呂 正行 (NORO MASAYUKI)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号: 50332755

野海 正俊 (NOUMI MASATOSHI)

神戸大学・自然科学系先端融合環重点研究
部・教授

研究者番号: 80164672

WF. Rossmann (ROSSMAN WAYNE)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号: 50284485

(3) 連携研究者

新井 敏康 (ARAI TOSHIYASU)

千葉大学・理学研究科・教授

研究者番号: 40193049 (H21 : 連携研究者)