様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 24 年　5 月　　31 日現在

機関番号：14301　　研究種目：基盤研究（A）
研究期間：　2007　～　2010
課題番号：19204012
研究課題名（和文）
非線形波動・分散型方程式の幾何学的対称性と解の構造
研究課題名（英文）
Relations between properties of solutions and geometric symmetry of solutions for nonlinear wave and dispersive equations
研究代表者
堤　誉志雄　（TSUTSUMI YOSHIO ）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10180027

研究成果の概要（和文）：研究成果は以下の 3 つである．(1)調和写像熱流，Landau-Lifshitz 方程式やシュレディンガー写像に対し，渦解の安定性・不安定性の結果を得た．(2)べき乗型非線形性を持つシュレディンガー方程式に対し，初期値問題の解の無条件一意性を示した．(3)減衰項と外力の付いた非線形シュレディンガー方程式である，Lugiato-Lefever 方程式に対し，定数定常解からの分岐問題を解析し，定常解の線形安定性と線形不安定性に関する結果を得た．

研究成果の概要（英文）：The research results are as follows. (1) We proved the stability and instability of vortices for the harmonic map heat-flows, the Landau-Lifshitz equations and the Schrodinger maps. (2) We proved the unconditional uniqueness of solution for the Cauchy problem of the nonlinear Schrodinger with powernonlinearity. (3) We obtained the results about the linear stability and the linear instability of stationary solution bifurcating from the constant stationary solution for the Lugiato-Lefever equation, which is the nonlinear Schrodinger equation with damping and forcing.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	9,000,000	2,700,000	11,700,000
2008 年度	7,200,000	2,160,000	9,360,000
2009 年度	8,600,000	2,580,000	11,180,000
2010 年度	7,400,000	2,220,000	9,620,000
年度			
総　計	32,200,000	9,660,000	41,860,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：非線形波動・分散型方程式，初期値問題の適切性・不適切性，無条件一意性，解の漸近挙動，フーリエ制限法，

１．研究開始当初の背景

1980-90 年代における調和写像流や非線形波動方程式に対する研究により，非線形発展方程式の幾何学的対称性と解の特異性あるいは時刻無限大での漸近挙動の間に，密接な関係があることが分かった．たとえば，1990 年代に Klainerman and Machedon により導入された零条件（null condition）は波動方

程式の Lorentz 不変性と関係しており，この条件を満たす非線形性においては解の特異性が相殺し，通常よりも高い正則性が実現される．従来，発展方程式のスケール不変性と，その初期値問題が適切となる関数空間とを関連づける研究は多数なされてきたが，それは基本的に非線形性の次数のみに依存した考察であることが多かった．しかし非線形性の次数だけでは説明できない現象も多く，現在では，非線形性のより微細な構造が解の性質にどのように反映されるのかという研究が注目を浴びている．

２．研究の目的

最近の研究により，非線形発展方程式の幾何学的対称性と解の特異性あるいは解の時刻無限大での漸近挙動の間に，密接な関係があることが様々な方程式で確認されている．この点に着目し，非線形波動・分散型方程式に対し，方程式の幾何学的対称性と解の構造の関係を調べ，背後にある原理を探ることを目的とする．具体的には，以下の３つの研究を主に行うことを目標とした．

(1)解の正則性・特異性と方程式の幾何学的対称性との関係を調べる．

(2)解の時刻無限大での漸近挙動と方程式の幾何学的対称性との関係を調べる．

(3)特に，方程式のスケール不変性の果たす役割の精密な解析を行う．

３．研究の方法

以下の二つの方法により，

(1) 非線形波動・分散型方程式の初期値問題の適切性（解の存在，一意性および初期値に関する連続依存性の３つの性質が成立すること）に関する研究においては，ストリッカーツ評価式やフーリエ制限法が研究の基本的道具となる．しかし，単なるこれらの組み合わせでできることは，ほぼすでに終わっていると言って良い．そこで今回は，負の指数のソボレフ空間（正確には，ベゾフ空間）における非線形項の評価と，非線形相互作用の影響による線形解からのずれを測ることにより新しい知見を得ることを試みた．負の指数のソボレフ空間で解析を行うことは，滑らかな関数空間に較べ，非線形相互作用の影響がより強く現れるため，精密な解析ができる可能性がある．また，非線形方程式に対し解の第１近似を線形解と考えることは自然であるが，非線形相互作用の影響が顕著となる状況では必ずしも良い近似とはならない．そのようなケースでは，非線形相互作用を考慮した近似解を構成する必要がある．非線形波動・分散型方程式は保存系であるため，非線形性の影響は解の振動として現れることが多い．したがって，非線形性を考慮した位相の修正（phase correction）を線形解に付加したものを第１近似とすることにより，先行研究を超える成果を得ることができた．さらに，ストリッカーツ評価式も特別な摂動が付く場合は，通常より良い評価式が成立することが期待できる．これにより，非線形方程式を線形化した場合には，ある状況の下では改良型ストリッカーツ評価式を示すことが可能となり，新しい結果を得ることができた．

(2) Lugiato-Lefever 方程式は，減衰項と外力を持つ非線形シュレディンガー方程式であり，空洞共振器の数理物理モデルを記述する方程式である．その定常解は空洞ソリトンとよばれ，物理的に重要な現象に対応していると考えられている．減衰項と外力があるため，変分構造あるいはハミルトン系としての構造が壊れているので，峠の定理（mountain pass theorem）などの変分法的手法は適用できない．そこで，分岐理論によって，定常解の存在や線形安定性・不安定性の解析を行うことを試みた．非線形方程式の分岐理論としては，リヤプノフ・シュミット縮約に基づいた議論がよく知られているが，線形化作用素が退化している場合には，直接適用するのは困難である．今回は方程式の対称性を考慮したゴルビツキー・シェーファーの分岐理論を適用するとともに，さらにある場合にはより強力である中心多様体縮約の議論を用いることにより，新しい解析を目指した．

４．研究成果

非線形発展方程式の初期値問題に対する，解の存在と一意性は最も基本的な問題である．これらに対し，以下のような研究成果を得た．

(1)解の一意性の概念は，大雑把に言って二つに分けられる．一つは無条件一意性とよばれるもので，方程式が意味を持つための最も広いクラスに属する解の一意性である．もう一つは，条件一意性とよばれるもので，多くの場合解の存在定理を証明するためには条件を解に付加することが必要なため，それに対応した一意性のことである．無条件一意性は，解の存在証明に依存しない一意性定理であるという点で重要である．今回，空間５次元でゲージ不変な２次の非線形性を持つ非線形シュレディンガー方程式を考え，指数 1/2 のソボレフ空間に属する解の一意性について無条件一意性を示した(論文⑥)．このケースは，いわゆるスケール不変な問題に相当し，多くの場合初期値問題の適切性が成立するか否かの境目になると予想されている．さらに，ゲージ不変な２次の非線形性は２階微分が連続ではないため，スケール不変なケースの中でも，数学的にきわめて興味深い問題であった．

(2)周期境界条件下で修正 KdV 方程式の初期値問題に対し，解の存在を研究した(論文③)．

2 乗可積分関数のソボレフ空間に基づいた研究は，1993 年に Bourgain がソボレフ空間の滑らかさを示す指数 s に対し，s > 1/2 なら初期値問題は適切となることを示した．このときの彼の証明方法はフーリエ制限法とよばれ，線形解からのずれを精密に測る関数空間を設定したのが要点であった．2004 年に高岡−堤は，このフーリエ制限ノルムに非線形項の相互作用を考慮した項を加えることにより，s > 3/8 までソボレフ空間の指数（すなわち，関数の滑らかさ）を下げることができることを示した．今回は，適切性を示すことはできなかったが，解の存在は s > 1/4 で証明することに成功した．この証明では，mKdV の完全可積分性は使っておらず，他の非線形分散型方程式への応用も期待される．

さらに，解の時刻無限大での漸近挙動に関しては以下の結果を得た．
(3) 空間 2 次元おいて，調和写像熱流，Landau-Lifshitz 方程式やシュレディンガー写像に対し，渦解の安定性・不安定性を調べた（論文①）．空間 2 次元においては，エネルギー空間がスケール不変な空間となるため，その解析は他の次元よりも興味深い．具体的には，２次元ユークリッド空間から２次元球面への調和写像で写像度が 3 の場合 Schrödinger 写像流で安定になることや，写像度が２の場合は調和写像勾配流において不安定になることを示した．写像度が３の調和写像は空間無限遠での減衰速度が遅く，安定性を示すのは困難であった．しかし，新しいタイプの Strichartz 評価式を証明することにより，安定性を妨げる可能性のあるエネルギー凝縮が生じないことを示した．また，写像度２の場合は，調和写像の近くから出発しても，空間無限遠へのエネルギー凝縮と空間原点でのエネルギー凝縮を永遠に繰り返す解が存在することを示した（これは，強い不安定性を証明したことになる）．エネルギー凝縮を無限遠と有限点において無限回繰り返す現象は，解の漸近挙動を大域的に解析する場合にはもっとも問題となるシナリオであり，これを排除する結果はたくさんあるが，実際に起こることがあり得ることを示したのはこの論文①が初めてであり画期的なことであった．
(4) 空洞共振器の数理モデルを記述する Lugiato-Lefever 方程式に対し，定数定常解から分岐する解の存在と安定性・不安定性を調べた（論文②）．Lugiato-Lefever 方程式は，減衰項と外力を持つ３次非線形シュレディンガー方程式であり，減衰項と外力により方程式の変分構造あるいはハミルトン系としての構造が壊れるため，通常の非線形シュレディンガー方程式で培われた解析方法はすぐには適用できない．また，空間１次元であっても可積分系とはならず，関数解析的および実関数論的手法による解析が必要となる．この方程式に対し，中心多様体縮約の議論を用いて，定数定常解から分岐する定常解の存在およびその線形安定性・不安定性を証明した．特に，パラメータによっては，分岐が折れ曲がる（フォールディング）場合があることを示した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　10 件）

① S. Gustafson, K. Nakanishi and T.-P. Tsai, Asymptotic stability, concentration, and oscillation in harmonic map Heat-flow, Landau-Lifshitz, and Schrodinger maps on R^2, Comm. Math. Phys.，査読有，300 (2010), 205-242.

② T. Miyaji, I. Ohnishi and Y. Tsutsumi, Bifurcation analysis to the Lugiato-Lefever equation in one space dimension, Physica D, 査読有，239 (2010), 2066-2083.

③K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Tsutsumi, Local well-posedness in low regularity of the mKdV equation with periodic boundary condition, Discr. Cont. Dynam. Syst.，査読有，28 (2010), 1635-1654.

④ Z. Arai, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow, H. Oka and P. Pilarczyk, A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems, SIAM J. Appl. Dyn. Syst.，査読有，8 (2009), 757-789.

⑤ S. Ibrahim, M. Mohamed, N. Masmoude and K. Nakanishi, Scattering for the two-dimensional energy-critical wave equation, Duke Math. J.，査読有，150 (2009), 287-329.

⑥ Y.Y. Su Win and Y. Tsutsumi, Unconditional uniqueness of solution for the Cauchy problem of the nonlinear Schrodinger equation, Hokkaido Math. J.，査読有,37 (2008), 839-859.

⑦ Y. Tsutsumi, Time decay of solution for the KdV equation with multiplicative space-time noise, Differential and Integral Equations, 査読有，21 (2008),

959-970.

⑧ S. Gustafson, K. Nakanishi and T.-P. Tsai, Global dispersive solutions of the Gross-Pitaevskii equation in two and three dimensions, Ann. Henri Poincare, 査読有, 8 (2007), 1303-1331.

⑨ H. Kokubu, D. Wilczak and P. Zigliczynski, Rigorous verification of cocoon bifurcations in the Michelson system, Nonlinearity, 査読有, 20 (2007) 2147-2174.

⑩ Y. Liu and M. Ohta, Stability of solitary waves for the Ostrovsky equation, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有,136 (2007), 511-517.

〔学会発表〕（計　4 件）

① Y. Tsutsumi, 1D quantic NLS with white noise, "Nonlinear Phenomena: A View from Mathematics and Physics", 2011 年 1 月 14 日, 国立台湾大学(台湾).

② Y. Tsutsumi, Stability of cavity soliton for the Lugiato-Lefever equation with additive noise, "Analysis of Nonlinear Wave Equations and Applications in Engineerign", 2009 年 8 月 10 日, BIRS, Banff, Canada.

③ Y. Tsutsumi, Unconditional uniqueness of solution for the Cauchy problem of the nonlinear Schrodinger equation, "Asymptotics and Singularities in Nonlinear and Geometric Dispersive Equations", 2008 年 8 月 28 日, BIRS, Banff, Canada.

④ Y. Tsutsumi, Unconditional uniqueness of solution for the Cauchy problem of nonlinear Schrodinger equation, "Nonlinear Hyperbolic Equations and Related Topics", 2007 年 9 月 6 日, University of Pisa, Pisa, Italy.

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
無し

６．研究組織
(1)研究代表者
堤　誉志雄（TSUTSUMI YOSHIO）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10180027

(2)研究分担者
重川　一郎　(SHIGEKAWA ICHIRO)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00127234

國府　寛司　(KOKUBU HIROSHI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50202057

西和田　公正（NISHIWADA KIMIMASA）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60093291

中西　賢次　(NAKANISHI KENJI)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：40322200

大鍛治　隆司（OKAJI TAKASHI）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：20160426

太田　雅人　(OHTA MASAHITO)
埼玉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00291394
(平成 19 年度～20 年度分担者)

高岡　秀夫　(TAKAOKA HIDEO)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
　　研究者番号：10322794
(平成 19 年度～20 年度分担者)

津川　光太郎 (TSUGAWA KOTARO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
(平成 19 年度～20 年度分担者)

(3)連携研究者

太田　雅人　(OHTA MASAHITO)
埼玉大学・大学院理学研究科・准教授
　　研究者番号：00291394
(平成 21 年度～22 年度連携研究者)

高岡　秀夫　(TAKAOKA HIDEO)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
　　研究者番号：10322794
(平成 21 年度～22 年度連携研究者)

津川　光太郎 (TSUGAWA KOTARO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
(平成 21 年度～22 年度連携研究者)