

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2007～2010

課題番号：19204013

研究課題名(和文) 偏微分方程式の相空間解析

研究課題名(英文) Phase Space Analysis of Partial Differential Equations

研究代表者

西谷 達雄 (NISHITANI TATSUO)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80127117

研究成果の概要(和文)：研究分担者間での緊密な研究協力，また毎年の国際研究集会を通して海外の研究者と研究協力を行うことにより，局所および大域相空間解析の手法を用いて，線形双曲型方程式の初期値問題，非線形分散型方程式や非線形波動の解の精密な漸近挙動，散乱理論，準古典的共鳴などの多くの課題で顕著な成果をあげることができた．また教育的な研究集会を継続的に開催することで，若手研究者が相空間解析の理論や技法を習得する機会を与えた．

研究成果の概要(英文)：Much progress has been achieved on linear hyperbolic Cauchy problem, on precise asymptotic behaviors of solutions to nonlinear dissipative and wave equations and on semi-classical resonances, by local and global phase space analysis, in deep cooperation with all research members through annual international meeting. We have also successfully supported young mathematicians to acquire the techniques of phase space analysis by annual instructive conference.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|------------|-----------|------------|
| 2007年度 | 8,600,000 | 2,580,000 | 11,180,000 |
| 2008年度 | 7,600,000 | 2,280,000 | 9,880,000 |
| 2009年度 | 7,100,000 | 2,130,000 | 9,230,000 |
| 2010年度 | 6,800,000 | 2,040,000 | 8,840,000 |
| 総計 | 30,100,000 | 9,030,000 | 39,130,000 |

研究分野：偏微分方程式

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：超局所解析，分散型方程式，非線形波動，ハミルトン写像，Fourier 積分作用素，平滑化作用，lifespan，初期値問題

1. 研究開始当初の背景

(1) 調和解析，函数解析，量子力学などの交錯する領域では，多くの現象が位置と同時に frequency に依存する．従ってこれらの現象は相空間内で記述され理解されるべきである，というのが現代偏微分方程式における基本的な考え方である．

(2) 大阪大学と兵庫県立大学には，相空間解析の専門家が数多く，彼らを研究分担者としているが，研究主題の違いや，局所解析かあるいは大域解析かのちがいなどによって，分

担者間の研究交流も少なく，互いに補い合っ
てより大きな効果の期待される相空間解析
のメリットのいかされることが少なかった．

2. 研究の目的

(1) 各分担者が，相空間内の大域的解析の手法を局所解析に取り入れ，また局所解析の手法を大域的解析に取り入れて，相互に研究交流を行い，個研究者だけの研究では明らかにされなかった問題の解明や，重複する研究主題の研究協力による解明，進展を目指すことを目的とした．

(2) 各研究分担者の研究主題の交錯する辺りに新たな共通の研究主題を設け、これを研究することも目的の一つとした。

3. 研究の方法

(1) 各分担者はお互いの研究や特に研究の手法を理解し、設定した研究題目を組織的に共同で研究する。

(2) 研究代表者は、大阪近辺の微分方程式研究者を集めて、毎週セミナーを開催し、これを日常的な研究連絡の場とする。

(3) 毎年、国内外の相空間解析の著名な研究者を招いて国際研究集会を開催し、情報交換および研究推進の場とする。また年に2回、国内外から招いた2, 3名の特別講師による連続講演を中心とした若い研究者のための小規模研究集会を開催する。

4. 研究成果

(1) どの Gevrey 空間で初期値問題が低階に拘らず適切になるか、を基本的な問題設定として、その Gevrey 指数で双曲型作用素の構造を決定する、という立場で研究を遂行し、以下の結果を得た。非実効果的双曲型作用素に対しては、ハミルトン写像の二乗の核と像の共通部分が零空間の場合には、上記 Gevrey 指数は2で、かつこの指数は最良である。この線形空間が零空間でない場合には Gevrey 指数は、この空間のみでは決定されず、零陪特性帯の2次特性多様体の周りでの挙動が深く関係する。2次特性多様体に極限点を持つ零陪特性帯が存在する場合には、上記 Gevrey 指数は3でかつこの指数は最良である。そのような零陪特性帯が存在しない場合は、上記 Gevrey 指数は4でかつこの指数は最良である。以上の結果により、強 Gevrey 適切指数が非実効果的双曲型作用素の構造をほぼ完全に決定することが分かった。

(2) 非実効果的双曲型作用素に対して、狭義 Ivrii-Petkov-Hormander 条件の下で初期値問題が滑らかな函数空間の中で適切となるか、という1980年代以来の問題に対して以下の結果を得た。2次特性多様体に極限点を持つ零陪特性帯が存在しなければ、初期値問題は狭義 Ivrii-Petkov-Hormander 条件の下で滑らかな函数空間の中で適切となる。一方、2次特性多様体に極限点を持つ零陪特性帯が存在すれば、Levi 条件を課しても初期値問題は滑らかな函数空間の中で適切とならない。さらに強く、Gevrey 指数が5より大なる空間では Levi 条件の下でも適切とならない。以上の研究の副産物として、いかなる低階に対しても初期値問題が滑らかな函数空間の中で適切とならない作用素の例を発見した。これはこれまでの常識を覆す例である。

(3) 双曲型不動点の近傍には、安定多様体と不安定多様体が存在するが、不安定多様体上で Schrodinger 方程式の超局所解を与えたと

き、エネルギーレベルが特定の数値でないときは、この与えられた解が不動点の近傍で解を一意的に決定することを証明した。さらにこの結果を応用して、Schrodinger 作用素の、解析性を持たない島の中の井戸型ポテンシャルが生成するレゾナンスの準古典分布を計算し、解析性をもつポテンシャルの場合と同じ結果を得た。

(4) 非線形 Schrodinger 方程式および非線形 Klein-Gordon 方程式の初期値問題に対して、解の lifespan の下限の精密な漸近評価を得ることに成功した。これは双曲型および分散型偏微分方程式に対する、最良の零条件を求めたことにもなっており、非線形波動現象の中の数学的構造の発見につながるものと期待される。

(5) 2次の非線形項をもつ一次元 Klein-Gordon 方程式系の時間大域解の存在および時間減衰評価について研究し、非線形項が零条件を満たす場合について時間大域解の存在および時間減衰評価を示した。また2次の非線形項を持つ一次元非線形 Schrodinger 方程式の解の漸近的挙動に対する研究を行い、解のフーリエ像が原点で消えている部分を自己相似解を用いて処理し、また共鳴項を取り出すためにフーリエ解析を用いて、自己相似解の近傍で解が安定であることを示した。

(6) Schrodinger 方程式および Airy 方程式を含む一般的な分散型方程式の解の精密な漸近的挙動を求め、その結果を非線形項を持つ固有振動数と線形問題の解の固有振動数が共鳴現象を起こす、臨界冪を持つ非線形問題に応用した。また固有振動数を考慮した近似解が非線形項からどのように求められるかを明確にして従来近似解をより精密なものにした。この結果は従来個別に取り扱われていた結果が統一的に取り扱える、ということを示した点においても重要である。

(7) 非線形項に微分項を含む微分型非線形 Schrodinger 方程式の解の漸近挙動を研究し、解の精密な漸近挙動を求めることに成功した。非線形項に微分項を含まない方程式の解については精密な漸近挙動が知られていたため、この結果により、3次の非線形項を持った非線形 Schrodinger 方程式の解の性質がかなり明らかになった。また非線形 Klein-Gordon 方程式と波動方程式からなる系の散乱問題の研究を行い、従来よりもより広い函数空間での散乱作用素の存在の証明に成功した。

(8) 分散型方程式の特異性伝播に関する研究を行い、主要部がラブラシアン冪乗とは限らない作用素の陪特性帯の挙動を明らかにすることで、より広い範囲の分散型方程式の解の特異性伝播を明らかにした。またこの研究の過程における FBI 変換の詳細な研究に

よって、複素幾何光学解の新しい構成法を提案した。この構成法は工学的逆問題に応用されている、という点でも意義深い。

(9) 偏微分作用素をその正準変換に対応するフーリエ積分作用素によってより単純な作用素に変換する古典的手法と、二つの偏微分作用素の表象の比較から対応するそれぞれの解の評価式を比較する新しい手法を組み合わせるにより、分散型方程式のみならず、非分散型方程式に対しても様々な平滑化評価式を得た。またポテンシャルを持つ Schrodinger 方程式に対してもこの手法が適用できることを示し、従来の平滑化評価を改良した。

(10) 擬微分作用素がモジュレーション空間で有界となるための、シンボルクラスの十分条件を提出した。またその条件の必要性についても、一部については、反例を構成することによって証明した。この反例は Calderon-Zygmund 作用素はモジュレーション空間で有界であるか、という基本的な問題に否定的に答えるものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 61 件)

- ① T. Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Gevrey 3 well-posedness, 査読有, 巻未定、発行年未定、ページ数未定、J. H. D. E. に掲載確定
- ② T. Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Gevrey 4 well-posedness, 査読有, 巻未定、発行年未定、ページ数未定、Kyoto J. Math. に掲載確定
- ③ T. Nishitani, M. Tamura, A class of Fourier integral operators with complex phase related to the Gevrey classes, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 査読有, vol 1, 2010, 255-292
- ④ N. Tomita, A Hormander type multiplier theorem for multilinear operators, J. Funct. Anal. 査読有, vol 259, 2010, 2028-2044
- ⑤ N. Hayashi, P. I. Naumkin, Asymptotics of solutions to the periodic problem for nonlinear damped wave equation, NoDEA, 査読有, vol 17, 2010, 355-369
- ⑥ H. Kubo, M. Takai, A remark on long range effect for a system of semilinear wave equations, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 査読有, vol 42, 2010, 111-123
- ⑦ N. Hayashi, P. I. Naumkin, Wave operators to a quadratic nonlinear Klein-Gordon equation in two space dimension, Nonlinear Anal. 査読有, 71, 2009, 3826-3833
- ⑧ N. Hayashi, P. I. Naumkin, Asymptotics of odd solutions for cubic nonlinear Schrodinger equations, 査読有, J. Differential Equations, vol 246, 2009, 1703-1722
- ⑨ M. Kobayashi, M. Sugimoto, N. Tomita, Trace ideals for pseudodifferential operators and their commutators with symbols in alpha-modulation spaces, J. Anal. Math. 査読有, vol 107, 2009, 141-160
- ⑩ C. Iwasaki, Construction of the fundamental solution and curvature of manifolds with boundary, Oper. Theory Adv. Appl. 査読有, vol 189, 2009, 43-65
- ⑪ S. Fujiie, C. Lasser, L. Nedelec, Semiclassical resonances for a two-level Schrodinger operator with a conical intersection, Asymptot. Anal. 査読有, vol 65, 2009, 17-58
- ⑫ T. Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Ivrii-Petkov-Hormander condition and the Gevrey well-posedness, Serdica Math. J. 査読有, vol 34, 2008, 155-178
- ⑬ E. Bernardi, T. Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Gevrey 5 well-posedness, J. d'Analyse Math. 査読有, vol 105, 2008, 197-240
- ⑭ M. Sugimoto, N. Tomita, A counterexample for boundedness of pseudodifferential operators on modulation spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有, vol 136, 2008, 1681-1690
- ⑮ H. Sunagawa, The lifespan of solutions to nonlinear Schrodinger and Klein-Gordon equation, Hokkaido Math. J. 査読有, vol 37, 2008, 825-838
- ⑯ N. Hayashi, P. I. Naumkin, H. Sunagawa, On the Schrodinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type, SIAM J. Math. Anal. 査読有, vol 40, 2008, 278-291
- ⑰ S. Katayama, H. Kubo, An alternative proof of global existence for nonlinear wave equation in an exterior domain, J. Math. Soc. Japan, 査読有, vol 60, 2008, 1135-1170
- ⑱ H. Takuwa, G. Uhlmann, J. N. Wang,

Complex geometrical optics solutions for anisotropic equations and applications, J. Inverse Ill-Posed Probl. 査読有, vol 16, 2008, 791-804

- ⑱ T.Umeda, Y.Saito, The zero modes and zero resonances of massless Dirac operators, Hokkaido Math. J. 査読有, vol 37, 2008, 363-388
- ⑳ T.Umeda, Y.Saito, The asymptotic limits of zero modes of massless Dirac operators, Lett. Math. Phys. 査読有, vol 83, 2008, 97-106

[学会発表] (計 28 件)

- ① T.Nishitani, A class of Fourier integral operators with complex phase related to the Gevrey class, International Workshop on Global Properties of Partial Differential Equations on Manifolds, 2010/09/23, Cagliari (Italy)
- ② T.Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators in the Gevrey classes, The 8-th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010/05/27, Dresden (Germany)
- ③ 西谷 達雄, 非効果的双曲型方程式の初期値問題と Gevrey 空間, 日本数学会 2010 年度年会 (解析学賞受賞特別講演), 2010/03/24, 慶応大学
- ④ T.Nishitani, On the Gevrey well-posedness of the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, Linear and Nonlinear Hyperbolic Equations, 2010/02/10, Centro de Giorgi, Pisa (Italy)
- ⑤ T.Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators and the Gevrey classes, The 7-th East Asia Conference on PEDs, 2009/12/15, Hong Kong (Hong Kong)
- ⑥ T.Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Gevrey 4 well-posedness, The 7-th ISSAC Congress, 2009/07/16, Imperial College, London (England)
- ⑦ 杉本 充, 分散型方程式の時空間評価式と比較原理, 日本数学会 2009 年度年会 (函数方程式論分科会特別講演), 2009/03/27, 東京大学
- ⑧ 林 仲夫, 非線形 Klein-Gordon 方程式の散乱問題, 日本数学会 2009 年度年会 (解析学賞受賞特別講演), 2009/03/26, 東京大学

⑨ N.Hayashi, Scattering problem for nonlinear Klein-Gordon equations, The 1st Joint Workshop of Shanghai Jiao Tong University and Osaka University of Mathematical Sciences, 2008/12/17, Shanghai (China)

⑩ T.Nishitani, Hyperbolic operators with double characteristics, The 1st Joint Workshop of Shanghai Jiao Tong University and Osaka University of Mathematical Sciences, 2008/12/17, Shanghai (China)

⑪ 富田 直人, Pseudo differential operators on modulation spaces, 日本数学会 2008 年度年会 (実函数論分科会特別講演) 2008/03/25, 近畿大学

⑫ 西谷 達雄, 2 次特性点をもつ双曲型作用素と Gevrey クラス, 日本数学会 2008 年度年会 (函数方程式論分科会特別講演), 2008/03/23, 近畿大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西谷 達雄 (NISHITANI TATSUO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80127117

(2) 研究分担者

林 仲夫 (HAYASHI NAKAO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 30173016

(H19 は分担者, H20~H22 は連携研究者として参画)

土居 伸一 (DOI SHINICHI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00243006

(H19 は分担者, H20~H22 は連携研究者として参画)

杉本 充 (SUGIMOTO MITSURU)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 60196756

(H19 は分担者, H20~H22 は連携研究者として参画)

砂川 秀明 (SUNAGAWA HIDEAKI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 80375394

(H19 は分担者, H20~H22 は連携研究者として参画)

久保 英夫 (KUBO HIDEO)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：50283346
(H19 は分担者，H20～H22 は連携研究者として参画)

多久和 英樹 (TAKUWA HIDEKI)
同志社大学・工学部・准教授
研究者番号：80403111
(H19 は分担者，H20～H22 は連携研究者として参画)

楳田 登美男 (UMEDA TOMIO)
兵庫県立大学・物質理学研究科・教授
研究者番号：20160319
(H19 は分担者，H20～H22 は連携研究者として参画)

岩崎 千里 (IWASAKI CHISATO)
兵庫県立大学・物質理学研究科・教授
研究者番号：30028261
(H19, H22 は分担者，H20, H21 は連携研究者として参画)

保城 寿彦 (HOSHIRO TOSHIHIKO)
兵庫県立大学・物質理学研究科・教授
研究者番号：40211544
(H19 は分担者，H20～H22 は連携研究者として参画)

藤家 雪朗 (FUJIIIE SETSURO)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：00238536
(H19～H21 は分担者，H22 は連携研究者として参画)

(3)連携研究者

富田 直人 (TOMITA NAOHITO)
大阪大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：10437337