

機関番号：12608

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2007～2010

課題番号：19204014

研究課題名（和文） 非線形放物型および楕円型方程式の定性理論の新展開

研究課題名（英文） New development of the qualitative theory of nonlinear parabolic and elliptic equations

研究代表者

柳田 英二（YANAGIDA EIJI）

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：80174548

研究成果の概要（和文）：非線形放物型および非線形楕円型方程式の解の構造について定性的な研究を行った。主な研究成果は以下の通りである。まず、ある非線形放物型偏微分方程式における移動特異点を持つ解の存在とその一意性について調べた。また、特異点の強さがある時刻で変性するような解が存在することを明らかにするとともに、特異点が移動しない場合に解の漸近挙動について調べ、特異定常解に収束するための条件について明らかにした。次に、走化性方程式において、1点に凝集することによって自己相似的に爆発する解の構造について明らかにした。さらに、Gierer-Meinhardt 系と呼ばれる反応拡散系に対し、パターン形成に関する数理構造を調べるとともに、時間依存する解の挙動について明らかにした。

研究成果の概要（英文）：We carried out the investigation about the structure of solutions of nonlinear parabolic and elliptic equations. Our main results are as follows:

Next, we studied the existence and uniqueness of solutions with moving singularities for a nonlinear parabolic partial differential equation. We also showed that there exists a solution with a moving singularity that changes its type suddenly., and made clear the asymptotic behavior of singular solutions that converges to a singular steady state. We also studied a chemotaxis system, and made clear the structure of self-similar solutions that blows up by concentrating to a point in finite time.

For a reaction-diffusion system, which is called a Gierer-Meinhardt system, we studied the mathematical structure of pattern formation, and also made clear the behavior of time-dependent solutions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	9,700,000	2,910,000	12,610,000
2008年度	8,900,000	2,670,000	11,570,000
2009年度	8,900,000	2,670,000	11,570,000
2010年度	8,878,887	2,663,666	11,542,553
年度			
総計	36,378,887	10,913,666	47,292,553

研究分野：解析学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式の大域理論

1. 研究開始当初の背景

自然界における時空間パターン形成や波動の伝播などの現象は、反応拡散系などの連立非線形放物型偏微分方程式を用いてモデル化され、数理科学的な立場から多くの研究がなされてきた。反応拡散系の理論の発展には三村昌泰氏を中心とする日本のグループの貢献が大きい。また、単独の非線形拡散方程式についても、藤田宏氏による爆発の臨界指数についてのパイオニア的研究以来の伝統があり、多くの国内研究者が理論の構築に貢献してきた。

一方、非線形楕円型方程式については古典的な関数解析的研究に加え、放物型方程式の定常状態を記述する方程式として新しい傾向の研究が進められた結果、新たな非線形構造の発見へとつながっている。このような流れの中で、非線形放物型および楕円型方程式は理論面からも応用面からもその重要性が高まり、アメリカ、ヨーロッパ諸国、日本を中心に研究が進められ、その定性理論は偏微分方程式論におけるもっとも重要かつ発展性のある問題の一つとなっていた。

2. 研究の目的

本計画の目的は、各種の非線形放物型および楕円型偏微分方程式に共通する数理構造に着目し、統一的な視点から研究を行うことによって定性理論を発展させるとともに、将来に向けての新たな展開を計ることにある。

非線形偏微分方程式は自然科学、工学等に見られる非線形現象のモデルとして導入されることが多く、解の持つ定性的な性質を調べることは研究の大きな目標である。例えば放物型方程式であれば、時間大域的な解の漸近的挙動あるいは有限時間で発生する特異性の解析などが基本的な問題である。また楕円型方程式に対しては、特徴的な解の存在、解構造のパラメータ依存性などが一般的な研究課題となる。非線形偏微分方程式の研究は、初期の段階では方程式

ごとの個別の理論として発展するのが普通であるが、これまでの研究成果の蓄積により、異なる方程式に類似した非線形構造が見られることが認識された。この結果、より大局的な見地からの取り扱いの必要性が高まっているが、用いられる数学的手法は方程式によって異なるのが普通であり、個人による研究によっては統一的な視点からの定性理論の構築はきわめて難しい課題となっている。

本計画は、非線形解析学というコアとなる部分を共有する背景の異なる数名の研究者が中心となって、組織的かつ分野横断的に研究を進めることにより、「異なるクラスの方程式に見られる共通の非線形構造を統一的な視点から探る」ことを基本方針として、定性理論の発展と新たな展開を目指すものである。

3. 研究の方法

数学的には、従来の偏微分方程式論的あるいは関数解析的手法に加え、特異摂動法、漸近解析的手法、無限次元力学系の理論、変分的手法、分岐理論を発展させることによって問題の解決にあたりるとともに、これまでの不備な点を補う新たな解析手法の構築を目指した。

また現象の直感的理解を助けるために、数値シミュレーションを補助的手段として用いる他、分岐構造を仮定した上でそれから得られる数学的結果を厳密に証明すると言ったような、semi-rigorous なアプローチも試みた。

本計画を推進するにあたっては、代表者および分担者はそれぞれの研究分野の発展を図ると同時に横の連携を強化する必要があった。そのために、構成員全員が集まる機会を持ち、上記の課題に向けての基本的な戦略について意見を交換した。その後、互いに連絡をとりながら、必要に応じて研究者同士が訪問しあって共同研究を開始した。また機会をみて海外の研究協力者を招へいあるいは訪問し、最新の情報や意見の

交換を行い共同研究に着手した。

4. 研究成果

(1) 藤田型方程式に対する有限時間で爆発する現象の出現条件とその挙動の解析を行い、これまでに知られていた条件を拡張するとともに特別な挙動を示す解の存在をしめした。

(2) 移動特異点を持つ解の存在と一意性、漸近挙動の解析を行い、これまでに知られていない解のクラスを発見した。

(3) Gierer-Meinhardt 系の解の性質についての解析を行い、パターンの安定性とソースの関係を調べるとともに、これまでに知られていなかった解の崩壊現象を発見した。

(4) Keller-Segel 系における解の崩壊と自己相似解の構造について調べ、その性質を明らかにした。

(5) 非線形放物型方程式の自己相似解に対する変分法を用いた解析を、その構造を解明した。

(6) 放物型方程式におけるヘテロクリニック軌道とホモクリニック軌道の存在を初めて示すとともに、その存在条件について調べた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計50件)

1. S. Sato and E. Yanagida, Forward self-similar solution with a moving singularity for a semilinear parabolic equation, Disc. Cont. Dyn. Systems 査読有, 26 (2010), 313-331.

2. E. Yanagida and L. Zhang, Speeds of Traveling Waves in Some Integro-Differential Equations Arising from Neuronal Networks, Japan J. Indust. App. Math. 査読有, 27 (2010), 347-373.

3. P. Polacik and E. Yanagida, Convergence of anisotropically decaying solutions for a supercritical semilinear heat equation, J. Dyn. Diff. Eqs. 査読有 21 (2009), 329--341.

4. M. Fila, M. Winkler and E. Yanagida, Slow convergence to zero for a parabolic

equation with supercritical nonlinearity, Math. Ann. 査読有, 340 (2008), 477-496.

5. M. Fila, M. Winkler and E. Yanagida, Convergence to selfsimilar solutions for a semilinear parabolic equation, Disc. Cont. Dyn. Systems, 査読有, 21 (2008), 703--716.

6. M. Hoshino and E. Yanagida, Sharp estimate of the convergence rate for a semilinear parabolic equation with supercritical nonlinearity, Nonlinear Analysis TMA, 査読有, 69 (2008), 3136--3152.

7. S.-I. Ei, H. Ikeda, K. Ikeda and E. Yanagida, Eigenfunctions of the adjoint operator associated with a pulse solution of some reaction-diffusion systems, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.), 査読有, 3 (2008), 603-666.

8. K. Watanabe, I. Takagi, Representation formula for the critical points of the Tadjbakhsh-Odeh functional and its application. Japan J. Indust. Appl. Math., 査読有, 25 (2008), 331-372.

9. Y. Naito, Self-similar solutions for a semilinear heat equation with critical Sobolev exponent. Indiana Univ. Math. J. 57 (2008), 1283-1315.

10. T. Ogawa and S. Shimizu, The drift diffusion system in two-dimensional critical Hardy space. J. Funct. Anal., 査読有, 255 (2008), 1107-1138.

11. M. Roger and Y. Tonegawa, Convergence of phase-field approximations to the Gibbs-Thomson law. Calc. Var. Partial Differential Equations, 査読有, 32 (2008), 111-136.

12. M. Fila, J. R. King, M. Winkler and E. Yanagida, Grow-up of solutions of a semilinear parabolic equation with a critical exponent, Adv. Diff. Eqs., 査読有, 12 (2007), 1-26.

13. E. Yanagida, Irregular behavior of solutions for Fisher's equation, J. Dyn. Diff. Eqs., 査読有, 19 (2007), 895--914.

14. K. Suzuki, I. Takagi, On the role of the source terms in an activator-inhibitor

system proposed by Gierer and Meinhardt. Asymptotic analysis and singularities-elliptic and parabolic PDEs and related problems, 749-766, Adv. Stud. Pure Math., 査読有, 47-2, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007

15. K. Ishige, Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Dirichlet boundary condition. Adv. Differential Equations, 査読有, 12 (2007), 1135-1166.

16. K. Ishige, Y. Kabeya, Decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball. J. Math. Soc. Japan, 査読有, 59 (2007), 861-898

[学会発表](計 約160件)

1. Eiji Yanagida, Global and non-global solutions with moving singularities for a semilinear parabolic equation, The 7th East-Asia conference on PEDs, Chinese University of Hong Kong and the City University of Hong Kong, December 14 (2009).

2. Eiji Yanagida, Solutions with moving singularities for a semilinear parabolic equations, 7th AIMS international conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, University of Texas at Arlington, USA (May 18-21, 2008)

ホームページ等

<http://www.math.titech.ac.jp/~yanagida/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

柳田 英二 (YANAGIDA EIJI)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：80174548

(2) 研究分担者

高木 泉 (IZUMI TAKAGI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40154744

内藤 雄基 (NAITO YUKI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：10231458

小川 卓克 (OGAWA TAKAYOSHI)
東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：20224107

栄 伸一郎 (EI SHIN-ICHIRO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：30201362

石毛 和弘 (ISHIGE KAZUHIRO)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90272020

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：20188828

二宮 広和 (NINONMIYA HIROKAZU)

龍谷大学・理工学部・准教授

研究者番号：90251610

利根川 吉廣 (TONEGAWA YOSHIHIRO)

北海道大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80296748

(3) 連携研究者

()

研究者番号：