

機関番号：12601

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006 ~ 2010

課題番号：19340003

研究課題名 (和文) 極小モデルの定理の検証・発展・応用

研究課題名 (英文) Reviews, developments and applications of the minimal model theorem

研究代表者

宮岡 洋一 (MIYAOKA, YOICHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：50101077

研究成果の概要 (和文) : 代数多様体やオービフォールド上のベクトル束やヒッグズ束を, 幾何学的視点から考察し, その応用を与えた。2次元オービフォールドの余接束に対する宮岡・ヤウ不等式から, ある位相幾何的条件をみたす一般型曲面上の整曲線に対するグリーン・ラング予想を, エフェクティブな形で解決した。またヒッグズ束の新しい定式化を与え, 以前に知られていなかったヒッグズ束の例を大量に構成した。

研究成果の概要 (英文) : We studied vector bundles and Higgs bundles on algebraic varieties and orbifolds, giving several applications of them. We proved an effective version of the Green-Lang conjecture for entire curves on a surface of general type when the surface satisfies a certain topological condition. We gave a new definition of Higgs bundles, which enabled us to construct new examples of Higgs bundles.

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010年度	1,600,000	480,000	2,080,000
年度			
総計	6,600,000	1,980,000	8,580,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 双有理代数幾何における基本予想の一つである極小モデル理論の重要な部分が Birkar, Cascini, Hacon, McKernan の論文で解かれたと伝えられた。

(2) Simpson が定義したヒッグズ束の理論が望月拓郎氏の一連の仕事によって一般化・精密化されつつあった。

## 2. 研究の目的

(1) Birkar, Cascini, Hacon, McKernan

の結果を受けて, その証明方法を検証し, 彼らの標準束に対する結果を, 余接束, あるいは余接束の対称テンソル積へと拡張し, より精密な結果を得る (最終的にはいわゆるアバンドランス予想へとつながることを期待している)。

(2) さらに Higgs 束理論と組み合わせることによって, 宮岡・ヤウ不等式の特異点付き多様体への拡張など, 幾何学へのまったく新しい応用を考える。

### 3. 研究の方法

(1) 代数多様体上の安定ベクトル束に対するボゴモロフ不等式や余接束に関する宮岡・ヤウ不等式を拡張し、オービフォルド上のオービフォルド束の上でも証明する。具体的には局所群作用に関してよいふるまいをする因子分解を見ることになる。拡張された宮岡・ヤウ不等式を基に、代数多様体、特に代数曲面上の曲線についての幾何学的情報を導き出す。

(2) Simpson はヒッグズ束を可積分接続付きのベクトル束と定義したが、これを読み替えて、接束が生成する対称テンソル代数が作用するベクトル束と定義して、純代数的な一般論を構築する。この読み替えを基に、今まで知られていなかった安定ヒッグズ束の例を統一かつ大量に構成するとともに、その一般的性質を調べる。

### 4. 研究成果

(1) 極小代数多様体に対して成立する宮岡・ヤウ不等式は、境界付きオービフォルドに対してもそのままの形で成立することを示した。この不等式を用いて、一般型極小曲面の第1チャーン数が第2チャーン数(オイラー数)より大きいという条件下では、この曲面に含まれる曲線の標準次数 canonical degree は、曲線の種数と曲面のチャーン数による具体的な関数によって上から押さえられることを証明した。特にそのような曲面が含む有理曲線や楕円曲線の個数は曲面の位相構造で定まる関数によって上から評価される。これはボゴモロフによる有限性定理(1979)をエフェクティブな形に強化するとともに、有名な Green-Lang 予想を部分的に支持する結果である(論文リスト [1])。ただしチャーン数の間に不等式が成立するという仮定がどの程度本質的であるのかは、現在のところ不明である。

(2) 一般型曲面上の曲線が非特異である場合は、上記(1)の結果がさらに改良され、チャーン数に関する仮定なしで、次数を種数と曲面の位相不変量で評価出来ることを示した。この評価によると、種数を大きくしていたとき、標準次数は種数の3倍程度で押さえられる。このような評価は McQuillan が2001年に予想したところであったが、それを解決するとともに、予想では触れられていない誤差項の精確な評価も与えることになった。一般にはわれわれの結果は最良であることも、単位超球の固定点付き商空間の分岐被覆として、可算個の実例を構成することによって示した(論文リスト [1])。

(3) 曲線が可約な場合に境界付きオービ

フォルド宮岡・ヤウ不等式を適用することによって、K3曲面や一般型曲面が載せている低次の曲線(直線や2次曲線など)の個数を評価することに成功した。さらに正確には、正の定数  $N$  を決めるとき、 $N$  次以下の有理曲線や楕円曲線について、次数によるウェイトを付けた個数の総和を、曲面の位相不変量と  $N$  によって定まる関数によって上から評価した。たとえば射影空間に埋め込まれた次数が十分大きな K3 曲面については、この曲面に載っている直線(次数1)はたかだか24本しか存在しない。このような評価を与えることはごく自然な問題であると考えられるが、既存の文献にいろいろあたってみても、非常に特殊な場合を除けば、先行結果はまったく存在しない(論文リスト [2])。

(4) ヒッグズ束の定義を純代数的に行った。その結果として、ヒッグズ束の一般的構成原理が明らかとなり、安定ヒッグズ束をほぼ機械的に構成できるようになった。こうした例のうちでも特に重要なものとして、自明なチャン類をもつ安定ヒッグズ束を、いくつか構成した。以前から知られていた例は、自然な幾何学的出自をもつものであったが、われわれが構成したものはそうした意味付けが知られていない。Simpson と望月の結果を参照すると、こうしたヒッグズ束はホッジ構造の変動のようなものを定義するが、この構造がどういう意味をもつのか、まったく不明である(論文リスト [3])。

(5) 上記(4)で構成した例を用いて、単位球体を普遍被覆にもつ曲面上の余接束の対称テンソル積に関するある種の消滅定理を証明した。たとえば余接束の  $3n$  回対称テンソル積は標準束  $K$  の  $n$  回テンソル積を含むことができない(論文リスト [3])。同じ結果は独立に S. Muller-Stach によっても得られた。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

1. Y. Miyaoka: “Stable Higgs bundles with trivial Chern classes. Several examples”, Proc. Steklov Inst. Math. **264** (2009), 123 - 130.

2. Y. Miyaoka: “Counting lines and conics on a surface”, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **45** (2009), 919 - 923.

3. Y. Miyaoka: “The orbifold Miyaoka-Yau-Sakai inequality and an effective Bogomolov-McQuillan theorem”,

[学会発表] (計 9 件)

1. Y. Miyaoka: “The Bogomolov inequality for semistable Higgs bundles”, Korea-Japan Symposium on Algebraic Geometry and Arithmetic Geometry, Korean Institute of Advanced Study (KIAS), Seoul, 2010 年 11 月

2. 宮岡洋一: “安定性・Bogomolov 不等式・Miyaoka-Yau 不等式”, 代数学シンポジウム, 北海道大学学術交流会館, 2010 年 8 月

3. Y. Miyaoka: “On the structure of Higgs bundles”, International Conference “Algebraic Geometry in Characteristic p”, 東京大学数理科学研究科, 2010 年 2 月

4. Y. Miyaoka: “Thirty years of the Bogomolov-Miyaoka-Yau inequalities”, International Symposium “Invariants in Algebraic Geometry”, 東京大学数理科学研究科, 2009 年 1 1 月

5. Y. Miyaoka: “Bogomolov-Kobayashi-Uhlenbeck-Yau-Simpson inequality for Higgs bundles”, International Conference “Geometric Analysis: Present and Future”, Harvard University, Cambridge, MA, USA, 2008 年 8 月

6. Y. Miyaoka: “Bogomolov inequality for semistable Higgs bundles”, Concluding Workshop of WAG 2007/08, University of Warwick, Coventry, U.K., 2008 年 7 月

7. Y. Miyaoka: “Canonical degree of curves on a surface of general type”, International Conference “Algebraic Geometry in Higher Dimensions”, Levico Terme, Italy, 2007 年 6 月

8. Y. Miyaoka: “Maximal rationally connected fibrations I, II”, “Characterizations of projective spaces and hyperquadrics”, School on rationally connected varieties, American Institute of Mathematical Sciences, Palo Alto, CA, USA, 2007 年 5 月

9. Y. Miyaoka: “Canonical degree of curves on a surface of general type”, International Symposium “Holomorphic and Algebraic Curves in Algebraic

Varieties”, University of Montreal, Montreal, Quebec, Canada, 2007 年 5 月

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮岡洋一 (MIYAOKA, YOICHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 501077

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし