

平成 22 年 4 月 26 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19340006

研究課題名 (和文) 籓多様体の幾何学と表現論

研究課題名 (英文) Geometry and Representation theory of quiver varieties.

研究代表者

中島 啓 (NAKAJIMA HIRAKU)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：00201666

研究代表者の専門分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：インスタントンの数え上げ、偏屈接続層、壁越え、モジュライ空間

1. 研究計画の概要

(1) 量子トロイダル代数の I -ウェイト空間の次元公式を、アフライン籓多様体のベッチ数として、大型計算機を用いて求める。

(2) Nekrasov の分配関数について、Donaldson 不変量との関連について研究する。特に、Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量が等価であるという Witten の予想についても、望月拓郎による、代数曲面の場合のヒルベルト概型上の交叉形式を用いた公式を用いて証明する。

(3) 籓多様体の上の接続層の導来圏の研究を、アフライン・ヘッケ環に関する Bezrukavnikov の研究を参考にしながら行う。

2. 研究の進捗状況

(1) 上の (2) の Nekrasov の分配関数と Donaldson 不変量との関連に大きな進展があったので、これを中心に研究を行った。まず、2007 年度は代数曲面を一点でブローアップした曲面を考え、その接続層の導来圏の中のアーベル圏として、偏屈接続層の圏と呼ぶものを、Bridgeland の類似の 3 次元の多様体の場合の研究に基づき、連携研究者の吉岡とともに定義し、そのモジュライ空間の研究を行った。次に、2008 年度には、これに引き続き偏屈接続層のモジュライ空間のベッチ数を計算した。さらに、2009 年度には偏屈接続層のモジュライ空間の上の自然なコホモロジー類の積分が、直線束による捻りによってどのように変化するかを、壁越え公式として書き下した。その応用として、物質場がある場合の Nekrasov の分配関数について、爆発方程式を満たすことを証明し、Seiberg-Witten

曲線との関連を明らかにした。その応用として、Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量が等価であるという Witten の予想を代数曲面の場合に証明した。

(2) 上の研究計画の (1) に関連して、籓多様体の上の偏屈層の研究を行い、レビ部分群への制限、およびアフライン籓多様体については有限次元リー群のレビ部分群のアフライン・リー環への制限を、交叉コホモロジーを用いて記述した。特に、Braverman-Finkelberg による、アフライン版の幾何学的佐武対応に関する予想を、A 型のときに解決した。

(3) やはり上の研究計画の (1) に関連して、次数付き籓多様体の上の偏屈層の研究を行い、クラスター代数との関連を明らかにした。特に、応用として、Hernandez-Leclerc による量子アフライン代数の既約表現のテンソル積に関する予想を肯定的に解決した。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

(2) については、当初の予定よりも早く問題が肯定的に解決した。一方で、(1)、(3) については、その影響のために、大きな進展がなく、関連した問題しか考察しなかったが、技術的な困難があるわけではないので、今後回復できる見通しである。

4. 今後の研究の推進方策

(1) Nekrasov の分配関数と Donaldson 不変量の関連については、Alday-Gaiotto-Tachikawa により、Virasoro

代数の表現との関連が予想されて、現在活発に研究が行われているところである。これは、研究代表者のヒルベルト概型とハイゼンベルグ代数の表現の関係とよく似ており、その高い階数の場合のものと捉えるのが自然である。数学的に厳密な証明を行うことをひとつの目標にしたい。また、この研究は R^4 の場合であるが、Witten 予想と絡めて、一般の 4次元多様体の場合を考察することや、すでに行った研究と関連させて、一点でブローアップした曲面の場合に考察すること、などが重要であると思われる。

(2) 籐多様体上の接続層の導来圏に関連して、アファイン型籐の表現の成すベクトル空間の上の構成的偏屈層のなす圏を考察することが、研究目的の一つ(上の研究計画の(3))であるが、この方向は、近年 Khovanov-Lauda や Rouquier の研究をきっかけに、Kac-Moody Lie 環の表現の圏化(カテゴリフィリケーション)として、活発な研究がなされている。これらの研究については、適宜専門の研究者との研究打ち合わせをしながら、研究を進める計画である。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Hiraku Nakajima and Kota Yoshioka, Perverse coherent sheaves on blow-up II. Wall-crossing and Betti numbers formula, J. of Alg. Geom. (to appear). 査読有
- ② Lothar Göttsche, Hiraku Nakajima, and Kota Yoshioka, K-theoretic Donaldson invariants via instanton counting, Pure and Appl. Math. Quaterly, 5 (2009), 1029-1111. 査読有
- ③ Hiraku Nakajima, Quiver varieties and branching, SIGMA 5 (2009) 37 pages. 査読有
- ④ Lothar Göttsche, Hiraku Nakajima, and Kota Yoshioka, Donaldson invariants and instanton counting, J. of Diff. Geom. 80 (2008), 343-390. 査読有

[学会発表] (計2件)

- ① Hiraku Nakajima, Instanton counting and wall-crossing in Donaldson invariants, Quiver varieties, Donaldson-Thomas invariants and instantons, Sep. 15, 16, 17, 2009, CIRM, Luminy

- ② Hiraku Nakajima, Quiver varieties and double affine Grassmannian, Bert Kostant's 80th birthday conference, 2008年5月19日, ブリテイッシュ・コロンビア大学(カナダ)

[その他]

ホームページ

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima>