様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 6 月 2 日現在

機関番号：14301
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2007 ～ 2010
課題番号：19340006
研究課題名（和文） 箙多様体の幾何学と表現論

研究課題名（英文） Geometry of quiver varieties and representation theory

研究代表者
中島 啓 （NAKAJIMA HIRAKU）
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00201666

研究成果の概要（和文）：代数曲面を一点でブローアップした曲面を考える。このとき、その連接層の導来圏の中のアーベル圏として、偏屈連接層の圏と呼ぶものを、連携研究者の吉岡とともに定義し、そのモジュライ空間の研究を行った。応用として、ドナルドソン不変量とサイバーグ・ウィッテン不変量が等価である、というウィッテンの予想を、さらにGöttscheを加えた共同研究で代数曲面の場合に肯定的に解決した。

研究成果の概要（英文）：Consider the blowup of a complex algebraic surface at a point. Together with Yoshioka, I introduced an abelian category in the derived category of coherent sheaves, called the category of perverse coherent sheaves, and study its moduli spaces. As an application, further with Göttsche, I proved Witten’s conjecture equating Donaldson invariants and Seiberg-Witten invariants for complex surfaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
2007年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2009年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2010年度	1,600,000	480,000	2,080,000
年度			
総 計	6,300,000	1,890,000	8,190,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：インスタントン，ドナルドソン不変量，偏屈連接層，壁越え公式

１．研究開始当初の背景

(1) 上で述べたウィッテン予想へのアプローチとして、望月によりヒルベルト概型上の交叉形式を用いた公式が示されており、うまくいくのではないかという期待があった。

(2) 箙多様体の幾何学と表現論については、箙多様体が有限型のときは、ある程度満足のいく理解が得られていたものの、アファイン型の場合には分からないことが多かった。

２．研究の目的

(1) ウィッテン予想を、望月の研究と私が吉岡と共同研究していたインスタントンの数

え上げと組み合わせることで解決する。

(2)アファイン型の箙多様体と、対応する表現論での対象である量子トロイダル代数の研究を行い、有限型の場合と同じレベルの理解に達する。特に、量子トロイダル代数の表現に標準基底が存在することを、箙多様体の上の連接層の導来圏の構造と関係させて、証明する。

３．研究の方法

(1) インスタントンの数え上げの理論を精密化する必要が生じ、まずブローアップした曲面上の偏屈連接層の理論を整備する必要があった。これが完成した後、望月の研究と組み合わせることを行った。

(2) 量子トロイダル代数の表現は、その次元公式なども知られておらず、またホップ代数の構造が入るかどうかは未解決である。これは量子アファイン代数の表現論が箙多様体を用いて理解できたことと好対照である。しかし、箙多様体の対応する幾何学的な構造は、量子アファイン代数に対応する有限型のときと、量子トロイダル代数に対応するアファイン型のときで、ほとんど変わらない。幾何学的な構造をより深く理解することによって、量子トロイダル代数の表現論の理解を進めることを当初、計画した。

　しかし、その後、幾何学的な構造自身にも、今まで見落としていたものがあることが、いくつか判明し、それらをよく理解することを手がかりとして始める方針に変更して、研究を進めた。

４．研究成果

(1)ウィッテン予想を、当初の目論見のとおりに次のような手順で解決した。まず、偏屈連接層の理論を用いることによって、インスタントンの数え上げに関するネクラソフの予想の解決を、質量場付きの場合に拡張することに成功した。次に、望月の研究に現れたヒルベルト概型の交叉形式を用いた表示式を、質量場付きのネクラソフの分配関数で書き表した。そして、この分配関数の主要項を、上で述べたネクラソフ予想の解決を用いて楕円関数で表して、計算を行い、ウィッテン予想で期待されていたものと一致していることを証明した。

　この成果は、興味深いものであり、代数曲面とは限らない、より一般の４次元多様体の場合の解決も、同じ方針で期待させるものである。

　しかし、それに留まらず、途中で整備する必要が生じた偏屈連接層の理論が、３次元カラビ・ヤウ多様体のドナルドソン・トーマス不変量の研究にも役立つことが分かり、研究が大きく展開した。一例として、当時、学振の研究生であった長尾健太郎と行ったコニフォールドの特異点解消のドナルドソン・トーマス不変量の壁越え公式に関する研究は、偏屈連接層の理論に基づくものであった。この研究は、国内外で高く評価されている。

(2)量子トロイダル代数の研究は、当初期待したほどは進まなかった。特に標準基底の存在の問題については、新たな成果は得られなかった。しかし、箙多様体の持つ幾何学的な構造が表現論に及ぼす影響について、いくつか考察した。まず、一つ目は箙多様体にはアファイン多様体であるものと、その特異点解消の二種類があったが、その中間に部分特異点解消になっているものがあり、それがレビ部分群への制限に対応していることを示した。これは、ブレーバーマンとフィンケルバーグによる、アファイン・リー代数の場合の幾何学的佐武対応予想に示唆されたものである。

　次に、ホップ代数の構造と表現のテンソル積を理解するために、箙多様体の部分多様体として定義される、テンソル積多様体の性質を研究した。これはすでに 2000 年に導入したものであったが、これを用いると合成積代数にホップ代数の構造が‘ほとんど’入ることが証明できた。量子トロイダル代数は、合成積代数とほとんど同型であることが示されているので、この結果は代数的なアプローチでホップ代数の構造が入るかどうかが未解決である、という技術的な問題を補う結果になると期待できる。

　また、それに留まらず、この結果を用いて量子トロイダル代数の表現の圏上にテンソル積を定義することに成功し、その応用として、クラスター代数の幾何学的な理解に到達することができた。この研究は、ヘルナンデス・ルクラークの、クラスター代数の乗法的圏化予想を肯定的に解決するものであり、応用としてクラスター代数の正値性予想を、

bipartite の場合に解決するものである。この結果は、国内外で高く評価されており、多くの研究集会に招待されて講演を行った。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① Kentaro Nagao and Hiraku Nakajima, Counting invariant of perverse coherent sheaves and its wall-crossing, IMRN, to appear.（査読有）

② Hiraku Nakajima and Kota Yoshioka, Perverse coherent sheaves on blow-up. II, wall-crossing and Betti numbers formula, J. Algebraic Geom. 20 (2011), no. 1, 47--100.（査読有）

③ Hiraku Nakajima, Quiver varieties and cluster algebras, Kyoto J. Math. Volume 51, Number 1 (2011), 71-126.（査読有）

④ Lothar Göttsche, Hiraku Nakajima and Kota Yoshioka, Donaldson = Seiberg-Witten from Mochizuki's formula and instanton counting, Publ. of RIMS, 47 (2011), No.1, 307--359.（査読有）

⑤ Lothar Göttsche, Hiraku Nakajima and Kota Yoshioka, K-theoretic Donaldson invariants via instanton counting, Pure and Appl. Math. Quaterly, 5, No. 3 (2009), 1029-1111.（査読有）

⑥ Hiraku Nakajima, Quiver varieties and branching, SIGMA, 5 (2009), 003, 37 pages.（査読有）

⑦ Hiraku Nakajima, Sheaves on ALE spaces and quiver varieties, Moscow Math. Journal, 7 (2007), No. 4, 699--722.（査読有）

〔学会発表〕（計８件）

① Hiraku Nakajima, Quiver varieties and cluster algebras, I, II, III, Derived categories of Algebro-Geometric origin and integrable systems, the 15th Midrasha Mathmaticae, Dec. 19－24, 2010 (Jerusalem)

②Hiraku Nakajima, Instanton counting and Donaldson invariants, London Math. Soc. Hardy lectures, July 2, 2010 (London)

④Hiraku Nakajima, Quiver varieties and double affine Grassmann, London Math. Soc. Hardy lectures, June 28, 2010 (Oxford, UK)

③Hiraku Nakajima, Quiver varieties and cluster algebras, London Math. Soc. Hardy lectures, June 22, 2010 (Leeds, UK)

⑤Hiraku Nakajima, Quiver varieties and crystal bases of quantum affine algebra, NSF-CBMS Conferences, May 25-29, 2010 (North Carolina State University, USA)

⑥ Hiraku Nakajima, Donaldson = Seiberg-Witten from Mochizuki's formula and instanton counting for the theory with a fundamental matter, Mirror Symmetry and Gromov-Witten Invariants, Dec. 7, 2009（東京大学）

⑦Hiraku Nakajima, Quiver varieties and cluster algebras, Summer School and Conference in Geometric Representation Theory and Extended Affine Lie Algebras, July 1, 2009 (Univ. Ottawa, Canada)

⑧ Hiraku Nakajima, Quiver varieties and double affine Grassmannian, Bert Kostant's 80th birthday conference, 2008 年 5 月 19 日(バンクーバー、カナダ)

〔図書〕（計０件）

〔その他〕

ホームページ等

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima

６．研究組織

(1)研究代表者

中島　啓 (NAKAJIMA　HIRAKU)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00201666

(2)研究分担者

石井　亮 (ISHII　AKIRA)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10252420
(H20 年度より連携研究者に変更)

吉岡　康太 (YOSHIOKA　KOTA)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40274047
(H20 年度より連携研究者に変更)