

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19340008

研究課題名 (和文) 混合対数ホッジ理論の研究とその幾何への応用

研究課題名 (英文) Theory of log mixed Hodge structures and its applications to geometry

研究代表者

臼井 三平 (USUI SAMPEI)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90117002

研究代表者の専門分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：混合対数ホッジ構造, モジュライ, 混合版 $SL(2)$ 軌道, カラビ・ヤウ多様体, 一般大域的トレリ定理, 混合版ボレル・セール コンパクト化, 対数的中間ヤコビ多様体, 対数的ネロンモデル

1. 研究計画の概要

加藤和也との10年程の共同研究により、対数的ホッジ理論を開発した。さらに中山能力も加わって3人で共同研究を続け、混合版への一般化を始めている。この共同研究を「対数的ホッジ班」として、全期間を通じて本応募の研究計画の中核とする。「幾何学班」「サイクル班」「退化班」と連携して、一般型曲面、カラビ・ヤウ多様体、normal function などへの混合対数ホッジ理論の応用を探る。

2. 研究の進捗状況

平成19年度：対数的周期写像や対数的アーベル・ヤコビ写像を使って、代数多様体・代数的サイクルおよびそれらのモジュライ・ホッジ構造らの相互関係を、退化を中心に据えて見直すことにより、これまで予想できなかったことが見えてきはじめた。その一つとして、カラビ・ヤウ多様体の極大冪単境界点における標準座標に関するD. Morrisonの仕事は、対数的ホッジ理論の枠組で捉え直すことと見通しがよくなり、その結果とこの場合の完備扇による対数的ホッジ構造の良モジュライを使って5次超曲面の鏡対称カラビ・ヤウ多様体族の対数的周期写像の大域的な性質（一般大域的トレリ定理など）が証明できた。

平成20年度：加藤・臼井確立した対数的ホッジ理論は図書欄に記した専門書として出版された。加藤・中山・臼井の対数的ホッジ理論の混合版の共同研究では、一段：

混合版多変数 $SL(2)$ 軌道定理、と二段：混合版ボレル・セール コンパクト化が出版された。臼井三平は幾何への応用の第一歩として次の成果を得た。完備扇の存在を仮定して、対数的周期写像による一般型多様体のモジュライの像がコンパクト モイシェゾン空間になることを証明した。5次鏡対称カラビ・ヤウ多様体の一般的対数的トレリ定理を証明した。

平成21年度：加藤・中山・臼井は次の成果を得た。複素1次元円盤上で完備扇を作り、対数的中間ヤコビ多様体を構成し、速報した。対数的混合ホッジ構造の分類空間の基本定理を記述し、その幾何への応用として、底空間が非特異因子の補集合のときに admissible normal functionの解析性の別証明を与え、速報した。対数的ホッジ理論の混合版三段目：混合版 $SL(2)$ -軌道の空間の構成の投稿可能版ができあがった。

3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している。

図書欄に記した加藤・臼井の本で対数的ホッジ理論の基礎を確立した。その内容は次の通りである。マンフォードらのエルミート対称領域の離散群による商のトロイダル・コンパクト化を一般化し、対数的ホッジ構造の分類空間を構成した。また、ホッジ構造の分類空間 (=Griffiths 領域 mod 離散群) のボレル・セール コンパクト化、 $SL(2)$ 部分コンパ

クト化なども構成し、これら相互の関係を示す基本図式を構成した。この本は、平成21年度の Annual Report of Osaka University, 10 選に入った。

発展としての加藤・中山・臼井の混合版では、次の成果を上げてきた。0. SL(2)-orbit orbit theorem (2008 年出版)。I. Bore-Serre spaces (2009 年2月出版)。II. Spaces of SL(2)-orbits (2010 年4月投稿)。III. Spaces of nilpotent orbits (作成中) ... これらの空間は、先の純の場合の基本図式の上に乗っていて、8つあるそれぞれの空間の上のファイバーとして、中間ヤコビ多様体、レギュレーター、ポアンカレ束、等々のトロイダル部分コンパクト化、SL(2)部分コンパクト化、ボレル・セールコンパクト化等を与える。このうち、対数的中間ヤコビ多様体とその一部であるネロンモデルへの応用については、斎藤盛彦のホッジ加群に基づく、Griffiths, Green, Pearlstein, Brosnan, Kerr, Schnell, 斎藤らのネロンモデル理論と競い合い刺激し合っている最中である。

4. 今後の研究の推進方策

加藤・中山・臼井による共同研究を引き続き行う。具体的には、次の計画を実施する。(1) 混合対数的ホッジ構造の分類空間を含む基本図式の構成を順次完成させていく。

また幾何へのこれらの応用として、次のような研究を実施する予定である。

- (2) 弱扇による対数的中間ヤコビ多様体の構成。ホッジ予想との関係が出てくると思える。
- (3) カラビ・ヤウ多様体の鏡対称性や Reid's fantasy に対して混合対数的ホッジ理論の立場からの解明をめざす。
- (4) 一般型多様体のモジュライのコンパクト化からの拡張された周期写像を具体例で調べる。特に偏極について調べる。
- (5) SL(2)-軌道の空間と、安定性との関係を調べる。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- (1) Kato, K., Nakayama, C., and Usui, S., Log intermediate Jacobians, Proc. Japan Acad., Ser. A 86-4 (2010) 73--78.
- (2) Kato, K., Nakayama, C., and Usui, S., Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, I: Borel-Serre spaces, Advanced Studies in Pure Math. 54 (2009), 187-222.

(3) Konno, K., On the fixed loci of the canonical systems over normal surface singularities, Asian J. of Math. 12-4 (2008), 449-464.

(4) Usui, S., Generic Torelli theorem for quintic-mirror family, Proc. Japan Acad., Ser. A 17-3 (2008), 143--146.

(5) Kato, K., Nakayama, C., and Usui, S., SL(2)-orbit theorem for degeneration of mixed Hodge structure, J. Algebraic Geometry 17-3 (2008), 401--479.

[学会発表] (計6件)

(1) S. Usui and K. Kato, Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures I: Spaces of nilpotent orbits; II: Spaces of SL(2)-orbits (a joint work with C.

Nakayama), Hodge theory and algebraic geometry: Occasion of the 60th birthday of Sampei Usui, 2009年6月29日~7月3日, 京都大学数理解析研究所, 2009年7月1日発表

(2) Nakayama, C., Relative rounding and submersivity of log smooth maps (joint work with Arthur Ogus), 同上研究集会, 2009年7月1日発表

(3) Konno, K., Certain surface singularities of general type, 同上研究集会, 2009年6月29日発表

(4) Usui, S., Log Hodge theory and applications to Calabi-Yau threefolds (with Kazuya Kato), 8th Oka Symposium, June 7, 2009, 奈良女子大学.

(5) Usui, S., Moduli of polarized logarithmic Hodge structures and period maps (joint work with K. Kato), Regulators and Heights in Algebraic Geometry, April 16, 2008, Alberta, Canada.

(6) Usui, S., Log Hodge structure and a geometric application, Hodge Theory, April 8, 2008, Banff, Canada.

[図書] (計1件)

(1) Kato, K. and Usui, S., Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures, Ann. Math. Studies 169, Princeton Univ. Press, (2009), 347 pages.