

機関番号：14401

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19340008

研究課題名 (和文) 混合対数ホッジ理論の研究とその幾何への応用

研究課題名 (英文) Theory of log mixed Hodge structures and its applications to geometry

研究代表者

臼井 三平 (USUI SAMPEI)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90117002

研究成果の概要 (和文)： 混合版多変数  $SL(2)$  軌道定理を証明した。混合版ボレル・セール コンパクト化、混合版  $SL(2)$ -軌道の空間、混合対数的ホッジ構造の分類空間を構成し、これらの成す基本図式を得た。これにより混合版の対数的ホッジ構造の基礎理論がほぼできあがった。以上の結果とホッジ予想や鏡対称性などとの関連も注目されるようになってきた。

研究成果の概要 (英文)： We proved a mixed version of  $SL(2)$ -orbit theorem. We constructed mixed versions of Borel-Serre compactifications, spaces of  $SL(2)$ -orbits, and spaces of nilpotent orbits, and obtained their fundamental diagram. Now the foundation of log mixed Hodge theory is almost established. The relationship between these results and geometry and physics, such as Hodge conjecture, mirror symmetry, etc., is gradually watched.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2008年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2009年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2010年度	2,800,000	840,000	3,640,000
年度			
総計	11,400,000	3,420,000	14,820,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・代数学

キーワード： ホッジ理論, モジュライ, 混合対数的ホッジ構造, 混合版  $SL(2)$  軌道, 混合版ボレル・セール コンパクト化, カラビ・ヤウ多様体, トレリ定理, ネロンモデル

## 1. 研究開始当初の背景

本研究実施前に次のことができていた。加藤和也と臼井との共同研究で、Mumford らのエルミート対称領域の離散群による商のトロイダル・コンパクト化を一般化し、Griffiths 領域の離散群による商の拡大として対数的ホッジ構造の分類空間を構成した。また、ホッジ構造の分類空間の Borel-Serre コンパクト化、 $SL(2)$  部分コンパクト化なども構成し、これら相互の関係を示す基本図式を構成した。(これらの結果は、[図書]欄に記した本として2009年1月に出版された。)

## 2. 研究の目的

これまでは周期写像を通して一般型曲面や Calabi-Yau 多様体の Hodge 構造の退化の様子をとらえることができなかったが、加藤・臼井の対数的ホッジ構造の分類空間の理論を使えば、これらの多様体のみならず一般の高次元代数多様体に対してそれが可能になった。このように多様体の大域的な退化をとらえることができる対数的周期写像や対数的アーベル・ヤコビ写像を使って、代数多様体・代数的サイクルおよびそれらのモジュライとホッジ構造の相互関係を、退化を中心に据えて見

直すことにより、これまで予想できなかったことが見えてきはじめた。

具体的には次のような目標を立てる。

- (1) 混合版 SL(2)軌道定理を使って、混合対数的ホッジ構造の分類空間を構成する。
- (2) 混合対数的ホッジ構造の分類空間から逐次商をとり対数的ホッジ構造の分類空間へ向う写像として、対数的中間ヤコビ多様体を構成する。
- (3) Green-Griffithsらが予想している、(非特異多様体) - (正規交叉因子) 上のadmissible中間ヤコビ多様体族の切断としてのnormal functionの代数性を示す。1変数のときはBrosnan-Pearlsteinが証明している。これを多変数のときへ拡張したい。
- (4) Green-Griffithsの定式化によるHodge予想を研究する。
- (5) 一般型曲面やカラビ・ヤウ多様体のモジュライのコンパクト化からの拡張された周期写像を研究する。

### 3. 研究の方法

加藤、中山、臼井が「対数的ホッジ班」を構成し、研究目的欄に記した(1)-(3)の研究を進める。これを全期間通じての研究計画の中核として据え、日常はメールを使い、必要に応じて出合せてセミナーを開く。

研究目的欄に記した(4)-(5)については、「対数的ホッジ班」、「幾何学班」、「サイクル班」、「退化班」が適宜連携して研究を進める。

### 4. 研究成果

加藤・臼井は十数年来の共同研究により、対数的ホッジ理論の基礎を確立し、その研究成果を専門書として出版した。

カラビ・ヤウ多様体の極大冪単境界点における標準座標に関するD. Morrisonの仕事は、対数的ホッジ理論の枠組で捉え直すと見通しがよくなり、その結果と、この場合の加藤・臼井の本にある完備扇による対数的ホッジ構造の良モジュライを使って、臼井は5次鏡対称カラビ・ヤウ多様体の一般的対数的トレリ定理を証明した。

対数的ホッジ理論の発展として、混合対数的ホッジ構造の分類空間の構成とその幾何への応用について、加藤・中山・臼井は共同研究を続け、次の成果を得た。混合版多変数SL(2)軌道定理を証明した。混合版ボレル・セールコンパクト化、混合版SL(2)-軌道の空間、混合対数的ホッジ構造の分類空間をそれぞれ構成し、これらの成す基本図式を得た。

これにより、混合版の対数的ホッジ構造の

基礎理論がほぼできあがった。

また上の結果の幾何への応用として、次の研究成果を得た。

- (1) 対数的中間ヤコビ多様体を構成した。
- (2) 多変数で、重みとホッジ型が任意である場合の、弱扇によるネロンモデルを構成した。
- (3) 上の(2)のいくつかの切断の共通部分の閉包の解析性を、混合対数的ホッジ理論により幾何学的に証明した。

これらはホッジ予想とも関係してくると思われる目下、斎藤盛彦, Griffiths, Green, Pearlstein, Brosnan, Kerr, Schnellらと刺激し合い競い合っている。上の(3)に先立ち、Brosnan-Pearlstein-Schnellはnormal functionの零点の閉包の解析性を証明していたが、それは加藤・中山・臼井の混合版SL(2)-軌道定理を使って収束性を議論するものであった。

梶原健・加藤・中山は共同研究で、解析的対数的ピカール多様体の理論を確立した。

梶原・中山は共同研究で対数的ベッチコホモロジーにおける局所系の高次準像に関する基本定理を証明した。

中山はA. Ogusとの共同研究で、トーリック多様体に付随する角付き多様体についての相対的な理論を構築し、対数的スムーズ射に付随する射の局所自明性などの基本的な結果を証明した。

今野は次の成果を得た。

非特異代数曲面上の非零有効因子は鎖連結曲線の和として表示できることを示した。

上の事実を用いて特異点解消の例外集合に台をもつ様々なサイクルを研究した。

Brieskorn型の2次元超曲面特異点に対して、基本種数の計算公式を確立し、極大イデアサイクルと基本サイクルが一致するための必要十分条件を求めた。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計25件)

(1) Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, II: Spaces of SL(2)-orbits, Kyoto J. Math.: Nagata Memorial Issue., 51-1 (2011), 149-261. 査読有

(2) Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, III: Spaces of nilpotent orbits, arXiv:1011.4353 (2010), 1-82. 査読有

- (3) Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Neron models in log mixed Hodge theory by weak fans, Proc. Japan Acad., Ser. A 86 (2010), 143–148. 査読有
- (4) Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Moduli of log mixed Hodge structures, Proc. Japan Acad., Ser. A 86 (2010), 107–112. 査読有
- (5) Kato, K., Nakayama, C. and Usui, S., Log intermediate Jacobians, Proc. Japan Acad., Ser. A 86 (2010), 73–78. 査読有
- (6) Kato, K., Nakayama, C., and Usui, S., Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, I: Borel–Serre spaces, Advanced Studies in Pure Math. 54 (2009), 187–222. 査読有
- (7) Konno, K., On the fixed loci of the canonical systems over normal surface singularities, Asian J. of Math. 12-4 (2008), 449–464. 査読有
- (8) Usui, S., Generic Torelli theorem for quintic-mirror family, Proc. Japan Acad., Ser. A 17-3 (2008), 143–146. 査読有
- (9) Kato, K., Nakayama, C., and Usui, S.,  $SL(2)$ -orbit theorem for degeneration of mixed Hodge structure, J. Algebraic Geometry 17-3 (2008), 401–479. 査読有
- (10) Kajiwara, T., Kato, K., and Nakayama, C., Analytic log Picard varieties, Nagoya Math. J., 191 (2008), 149–180. 査読有
- (11) Kajiwara, T. and Nakayama, C., Higher direct images of local systems in log Betti cohomology, J. Math. Sc. Univ. Tokyo, 15 (2008), 291–323. 査読有
- (12) Konno, K., On certain fibred rational surfaces, Kodai Math. J., 31 (2008), 21–37. 査読有
- (13) Konno, K., The base components of the dualizing sheaf of a curve on a surface (with Margarida Mendes Lopes), Archiv der Mathematik 90-5 (2008), 395–400. 査読有
- (14) Konno, K., Minimal pencils on smooth surfaces in  $P^3$ , Osaka Math. J. 45 (2008), 789–805. 査読有
- (15) Konno, K., On the cohomological cycle of a normal surface singularity, RIMS Kokyuroku Bessatsu 89 (2008), 143–151. 査読有
- (16) Konno, K., Relations in the canonical algebras on surfaces, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 120 (2008), 227–261. 査読有
- (17) Konno, K., On the fixed loci of the canonical systems over normal surface singularities, Asian J. of Math. 12-4 (2008), 449–464. 査読有
- (18) Nakayama, C., A projection formula

for log smooth varieties in log etale cohomology, Math. Z. 258 (2008), 915–924. 査読有

(19) Mori, S. and Prokhorov, Y., On  $Q$ -conic bundles, Publ. of RIMS 44-2 (2008), 315–369. 査読有

[学会発表] (計 52 件)

- (1) Usui, S., Log mixed Hodge theory and applications (joint work with K. Kato and C. Nakayama), Log Hodge theory and elliptic invariants, 2011, 2, 24, IPMU, Kashiwa campus, The University of Tokyo.
- (2) Usui, S., Log mixed Hodge theory and applications (joint work with K. Kato and C. Nakayama), JSPS-VAST Japan-Vietnam Bilateral Joint Projects, Topology of singularities and related topics, Jan. 6, 2011, Tohoku University (Miyagi).
- (3) Fujiki, A., Geometric interpretation of parameters of families of ASD bihermitian structures on hyperbolic Inoue surfaces, Geometry of complex manifolds IV, 2010.11.29, CIRM, Luminy, France.
- (4) Usui, S., Moduli space of log mixed Hodge structures and application to construction of Neron models. II (joint work with K. Kato and C. Nakayama), Mini-Workshop “Arithmetic Geometry and Related Topics”, 2010, 7, 18, Kyoto University.
- (5) Usui, S., Neron models in log mixed Hodge theory by weak fans (joint work with K. Kato and C. Nakayama), Summer School and Conference on Hodge Theory and Related Topics, 2010, 7, 1, ICTP, Trieste, Italy.
- (6) S. Usui and K. Kato, Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures I: Spaces of nilpotent orbits; II: Spaces of  $SL(2)$ -orbits (a joint work with C. Nakayama), Hodge theory and algebraic geometry: Occasion of the 60th birthday of Sampei Usui, 2009年6月29日～7月3日, 京都大学数理解析研究所, 2009年7月1日発表.
- (7) Nakayama, C., Relative rounding and submersivity of log smooth maps (joint work with Arthur Ogus), 同上研究集会, 2009年7月1日発表.
- (8) Konno, K., Certain surface singularities of general type, 同上研究集会, 2009年6月29日発表.
- (9) Usui, S., Log Hodge theory and applications to Calabi–Yau threefolds

- (with Kazuya Kato), 8th Oka Symposium, June 7, 2009, 奈良女子大学.
- (10) Usui, S., Generic Torelli Theorem for quintic-morphism family by log Hodge theory, GEOMETRY OF SINGULARITIES AND MANIFOLDS--KUSATSU 2008 --, 2008年9月12日, 関東セミナーハウス, 群馬県草津.
- (11) Konno, K., Chain-decompositions of canonical cycles, GEOMETRY OF SINGULARITIES AND MANIFOLDS--KUSATSU 2008 --, 2008年9月12日, 関東セミナーハウス, 群馬県草津.
- (12) Usui, S., Moduli of polarized logarithmic Hodge structures and period maps (joint work K. Kato), Regulators and Heights in Algebraic Geometry, April 16, 2008, Alberta, Canada.
- (13) Usui, S., Log Hodge structure and a geometric application, Hodge Theory, April 8, 2008, Banff, Canada.
- (14) 白井三平, Some geometric examples of polarized log Hodge structures, Hodge 理論, 退化, 複素曲面の代数幾何とトポロジー研究集会, 2008年3月11日, 東北学院大学.
- (15) 並河良典, Poisson deformations and symplectic varieties, UK-Japan Winter school, Algebraic and symplectic geometry, 2008年1月8日, University of Warwick, England.
- (16) 並河良典, Poisson deformations and symplectic varieties, Algebraic geometry and commutative algebra Tokyo 2007, 2007年12月14日, 東京大学.
- (17) 斎藤秀司, A conjecture of Colliot-Thélène on zero-cycles over local fields, Géométrie arithmétique et variétés rationnelles, December 7, 2007, CIRM, Luminy, France.
- (18) 並河良典, Poisson deformations and symplectic varieties, Complex Geometry in Osaka, 2007年11月4日, 大阪大学中之島センター.
- (19) 藤木 明, Anti-self-dual bihermitian metrics on Inoue surfaces, Complex Geometry in Osaka, 2007.11.3, 大阪大学中之島センター.
- (20) 白井三平, Images of log period maps: Cases of varieties of general type and of varieties with trivial canonical bundle, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2007年9月10日-12日, 九州大学.
- (21) 並河良典, べき零軌道と双有理代数幾何, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2007年9月11日, 九州大学.
- (22) 並河良典, Poisson deformations and

symplectic varieties, 代数学シンポジウム, 2007年8月8日, 神戸大学.

- (23) 今野一宏, Reducible curves on surfaces, 高次元代数多様体とベクトル束, 2007年7月3日, 京都大学数理解析研究所.
- (24) 並河良典, Birational geometry for nilpotent orbits and Mukai flops, Modular forms and Moduli spaces, 2007年7月3日, Saint-Petersburg, Russia.
- (25) 藤木 明, Compact non-Kähler threefolds with  $SL_2\mathbb{C}$ -actions, 複素幾何学と群作用, 2007.6.29, 新潟市新潟国際友好会館.
- (26) 森重文, On  $\mathbb{Q}$ -conic bundles, Algebraic Analysis and Around, 2007年6月28日, 京都大学数理解析研究所.
- (27) Kajiura, T. and Nakayama, C., Log abelian varieties (joint work with Kazuya Kato),  $p$ -adic method and its applications in arithmetic geometry, 2007.6.12, 東京大学.
- (28) 今野一宏, 代数曲面上の有理関数に関する一考察, 分岐被覆に関連する代数幾何とトポロジー, 2007年6月9日, 東北学院大学.
- (29) 斎藤秀司, Surfaces over a  $p$ -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, Algebraic K-theory and its Applications, June 1, 2007, ICTP, Trieste, Italy.
- (30) 森重文, Recent progress in higher dimensional algebraic geometry I, Clay Research Conference, 2007年5月14日, Clay 数学研究所.
- (31) 斎藤秀司, Surfaces over a  $p$ -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, Geometry of holomorphic and algebraic curves in complex algebraic varieties, May 3, 2007, CRM, Montreal, Canada.

[図書] (計1件)

- 1) Kato, K. and Usui, S., Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures, Ann. Math. Studies 169, Princeton Univ. Press, (2009), 347 pages.

## 6. 研究組織

- (1) 研究代表者  
 白井 三平 (USUI SAMPEI)  
 大阪大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号: 90117002
- (2) 研究分担者  
 加藤 和也 (KATO KAZUYA)  
 京都大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号: 90111450

(平成19年度～平成21年9月1日)

中山 能力 (NAKAYAMA CHIKARA)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教  
研究者番号：70272664

今野 一宏 (KONNO KAZUHIRO)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：10186869

森 重文 (MORI SHIGEFUMI)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：00093328  
(平成19年度)

齋藤 秀司 (SAITO SHUJI)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：50153804  
(平成19年度)

並河 良典 (NAMIKAWA YOSHINORI)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：80228080  
(平成19年度)

藤木 明 (FUJIKI AKIRA)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：80027383  
(平成19年度, 平成21年9月1日～平成22年度)

大野 浩司 (OHNO KOJI)  
大阪大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号：20252570

佐竹 郁夫 (SATAKE IKUO)  
大阪大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号：80243161  
(平成19年度)