

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19340009

研究課題名（和文）数学・物理学の様々な局面で現れるモジュラー・準モジュラー形式の総合的研究

研究課題名（英文）Studies on modular and quasimodular forms arising in various contexts in mathematics and physics

研究代表者

金子 昌信 (KANEKO MASANOBU)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：70202017

研究成果の概要（和文）：主に楕円モジュラー関数やモジュラー形式，準モジュラー形式についての研究を行った．とくに j 関数の実2次点での振る舞いに関連して非常に興味ある現象を発見した．関連してマルコフ2次無理数や，実2次無理数の caliber についての研究も行った．他に2進的な保型形式，Serre の保型性予想の2次体版，パンルヴェ方程式のモノドロミー，カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性，レンズ空間に対する free energy など保型形式に関連する研究にも進展があった．

研究成果の概要（英文）： We mainly studied the elliptic modular function, modular forms, and quasimodular forms. In particular, we found a very interesting phenomena concerning the behavior of the j -function at real quadratic numbers. Related topics such as Markoff irrationalities and the caliber of real quadratic fields were studied. Other topics we studied include 2-adic modular forms, quadratic version of Serre's modularity conjecture, monodromies of Painleve equations, mirror symmetries of Calabi-Yau varieties, and free energy of lens spaces, which are related to automorphic forms.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	3,300,000	990,000	4,290,000
2008年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
2009年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2010年度	2,500,000	750,000	3,250,000
年度			
総計	12,300,000	3,690,000	15,990,000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：モジュラー形式，準モジュラー形式，楕円モジュラー関数

1. 研究開始当初の背景

一変数のモジュラー形式は少なくとも19世紀半ば以来連綿と研究されてきた古典的な対象であるが，現在なお数学および物理学の様々な局面に意外な形で登場しては研究者を惹きつけ続けている．代表者はこれまで分担者や海外共同研究者と共に，「何故それがモジュラーになるのか？何故そこにモジュラー形式が現れるのか？」という問題意識

を根底におきながら，かなり広範な研究を行ってきており，本研究の背景をなすのはそれらの研究であり（具体的には次項），さらに視野をひろげながら，相互関連の理解に重心を移しつつ一層の深化を目指した．

2. 研究の目的

(1) 超幾何型の微分方程式の解になってい

るようなモジュラーおよび準モジュラー形式の研究：代表者と Don Zagier との共同研究において、超特異楕円曲線の j 不変量に関連して発見された、モジュラー形式の新しい系列の満たす微分方程式をプロトタイプとする研究で、その後小池正夫との共同研究でこの方程式の準モジュラー形式の解が意外な形で発見され「extremal」な準モジュラー形式という概念が定義された。そのフーリエ係数の数論的性質やトンプソン級数と超幾何の関係の研究を目的とした。

(2) 多重アイゼンシュタイン級数の研究：Gangl-Zagier との共同研究で定義された 2 重アイゼンシュタイン級数を一般化し、モジュラー形式の関連を探ることを目的とした。

(3) 共形場理論、無限次元リー代数に現れるモジュラー形式の研究

(4) ミラー対称性の楕円曲線版と頂点作用素代数。さらに一般のミラー対称性と弦理論の研究：Zagier との共同研究において、Dijkgraaf による「ミラー対称性の楕円曲線版」にあらわれるある母関数が準モジュラー形式になることの証明が、準モジュラー形式の理論の基礎づけとともに与えられたが、これに関連するであろう、準モジュラー形式（格子）頂点作用素代数のトレース関数として組織的に構成する研究、またカラビヤウ多様体のグロモフ-ウィッテン理論を通したモジュラー性の研究により、弦理論から予測されるモジュラー性の統一的な理解を目指した。

(5) 種々の位相不変量とモジュラー形式。

(6) ガロア表現との関係：モジュラー形式のフーリエ係数の 1 進的な性質をガロア表現的に理解しようとした。

これらの観点の総合的、統合的理解を通して、「何故それが（準）モジュラーになるのか」という根本問題についての知見を深めることを目的とした。

3. 研究の方法

(1) 連携研究者や海外共同研究者との議論や研究連絡を通してそれぞれの観点の理解を深める。

(2) 関連する分野の世界各地でのシンポジウムの報告集や、プレプリントなど、新しい情報の収集につとめ、検討を行う。

(3) 数式処理ソフトを使った計算機実験を行い新たな現象の発見を目指す。

4. 研究成果

(1) 楕円モジュラー関数の実 2 次点での値を定義し、その基本的な性質を証明、また数値実験により著しい現象を発見した。上半平面での値と同様モジュラー群不変性を持つというのが基本的で、重要性を示唆している。実験結果をまとめて論文として発表した。マルコフ 2 次無理数をファレイ分数でパラメトライズすることで新たな見方が出来ることなど、その後の進展については現在進行中である。Duke-Imamoglu-Toth の最近の研究との関連も今後の興味深い課題である。関連して、実 2 次無理数の caliber について調べ、ある種の合同式に関する予想を得、部分的に証明した。

(2) 楕円モジュラー j 関数、およびそのレベル 2, 3 での類似物のフーリエ係数の 2 進的, 3 進的な性質を計算し, Atkin のやり方に倣ったある種の極限を取ることでより得た 2 進, 3 進モジュラー関数について, その特定のモジュラー関数による展開係数の 2 進, 3 進位数について著しい明示的公式を証明し発表した。それとともにエクストリーマルなモジュラー形式とあるテータ級数の間の 2 べき, 3 べきを法とする合同式を証明した。この応用として, エクストリーマルなモジュラー形式のある分数べきが整係数になることを証明し発表した。

(3) sl_2 の制限量子群の射影加群のラディアルパートの 1 のべき根への特殊化から結び目不変量を構成した。これと色つきアレキサンダー多項式, またコンフォーマルフィールドセオリーとの関係を論じた。これらはいずれもモジュラー形式, また擬モジュラー形式との関係が深い対象で, その明示的な関係を見つけることが今後の課題となる。

(4) 頂切離散付値環の拡大についての Deligne の定理の一部を剰余体が不完全の場合に一般化した。Serre の保型性予想の 2 次体版を幾つかの 2 次体について mod 2 表現の場合に確かめた。

(5) 8 種類のパンルヴェ方程式を 10 種類の射影直線上の階数 2 の線形接続のモノドロミー保存変形として考察し, 対応するストークス・モノドロミー空間をアフィン 3 次曲線の族として具体的に表示した。放物接続のモジュライ空間に自然に 2 通りのラグランジアンファイブレーションが存在する事, およびその 2 つが横断的であることを示した。ラムダ放物接続のモジュライ空間のザリスキー稠密な開集合上に自然な標準座標が入る事を示した。またその座標のラムダが 0 になる時の挙動を調べた。3 次元の Reye congruence

に関わって構成されるカラビ・ヤウ多様体 X が双有理ではないが圏同値であるもう一つのカラビ・ヤウ多様体 Y と対をなす事を予想し, Y の構成を行った上で BPS 数の具体的計算とミラー対称性との整合性を詳しく調べ成果を得た.

(6) 超対称性共形場理論に密接に関わる擬テータ関数について詳細に調べ, 複素多様体の楕円種数に含まれる非 BPS 状態数を多様体のエントロピーと解釈することを提唱, 厳密な解析を行いブラックホールのエントロピーとの関連を指摘した.

(7) 有限多重ゼータ値の $\text{mod } p$ で見られる現象から類推して得られた多重ゼータ星値に関する予想を高さ 1 の場合に証明した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 28 件) :

- ① T. Eguchi, Kazuhiro Hikami, Note on twisted elliptic genus of K3 surface Physics Letters B 694 (2011) 446-455, 査読有
- ② Masanobu Kaneko, K. Mori, Congruences modulo 4 of calibers of real quadratic fields to appear in Ann. Sci. Math. Québec 査読有
- ③ Masanobu Kaneko, Y. Ohno, On a kind of duality of multiple zeta-star values, Int. J. of Number Theory, Vol.6-8, 1927-1932, (2010). 査読有
<http://www.worldscinet.com/ijnt/06/0608/S179304211000385X.html>
- ④ Masanobu Kaneko, (Ed. by G. Bhowmik, K. Matsumoto and H. Tsumura) Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, "Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions", MSJ Memoir, vol 21, 73-85, (2010). 査読有
- ⑤ Masao Koike, On 2-adic modular forms, Kyushu J. Math., 64 (2010), 199-214, 査読有
- ⑥ Shinobu Hosono, BCOV ring and holomorphic anomaly equation}, Advanced Studies in Pure Mathematics, (2010), 79-110, 査読有
- ⑦ Yuichiro Taguchi, T. Hiranouchi, Flat modules and Gröbner bases over truncated discrete valuation rings, Interdiscipl. Information Sciences 16 (2010), 33--37, 査読有
- ⑧ T. Eguchi, Kazuhiro Hikami, N=4 Superconformal algebras and the entropy of hyperKähler manifolds, Journal of High Energy Physics, 2010:02, 019, 28 pages, 査読有
- ⑨ T. Eguchi, Kazuhiro Hikami, N=2 Superconformal algebras and the entropy of Calabi-Yau manifolds Letters in Mathematical Physics, 92 (2010) 269--297 査読有
- ⑩ A. Matsuo, Kiyokazu Nagatomo, A. Tsuchiya, Quasi-finite algebras graded by Hamiltonian and vertex operator algebras Moonshine, The First Quarter Century and Beyond, Ja. Lepowsky, J. McKay, M. P. Tuite, Cambridge University Press, 2010, 査読有
- ⑪ Masa-Hiko Saito, Differential equations of Painlevé type and Algebraic Geometry (JAPANESE), Sugaku, 62(2010), no. 4, 524-544, 査読有
- ⑫ Masanobu Kaneko, Observations on the 'Values' of the elliptic modular function $j(t)$ at real quadratics, Kyushu J. Math., vol. 63-2, 353-364, (2009). 査読有
http://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/63/2/63_353/_article
- ⑬ K. Kajiwara, Masanobu Kaneko, A. Nobe, T. Tsuda, Ultradiscretization of a solvable two-dimensional chaotic map associated with the Hesse cubic curve, Kyushu J. Math., vol. 63-2, 315-338, (2009). 査読有
http://www.jstage.jst.go.jp/article/kyushujm/63/2/63_315/_article
- ⑭ Shinobu Hosono, Y. Konishi, Higher genus Gromov-Witten invariants of the Grassmannian, and the Pfaffian Calabi-Yau 3-folds}, Adv. Theor. Math. Phys. (2009), 1--33. 査読有
- ⑮ Masa-Hiko Saito, Marius van der Put, Moduli spaces for linear differential equations and the Painlevé equations (Espaces de modules pour des équations différentielles linéaires et équations de Painlevé), Annales de l'institut Fourier, 59 no. 7 (2009), p. 2611-2667, 査読有
- ⑯ Masanobu Kaneko, A note on poly-Bernoulli numbers and multiple zeta values, Diophantine analysis and related fields (DARF 2007/2008), AIP Conf. Proc. 976, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2008, 118-124. 査読有
- ⑰ Masanobu Kaneko, M. Noro, K. Tsurumaki,

On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values, Software for Algebraic Geometry, IMA 148 (2008), 47-58. 査読有

- ⑱ Yuichiro Taguchi, T. Hiranouchi, Extensions of truncated discrete valuation rings, Pure and Applied Mathematics Quarterly 4:Jean-Pierre Serre special issue (2008), 1205-1214, 査読有
- ⑲ Yuichiro Taguchi, H. Moon, The non-existence of certain mod 2 Galois representations of some small quadratic fields, Proc. Japan Acad. 84 (2008), 63--67, 査読有
- ⑳ Yuichiro Taguchi, H. Moon, On the finiteness and non-existence of certain mod 2 Galois representations of quadratic fields, Kyungpook Math. J. 48 (2008), 323--330, 査読有
- ㉑ Kiyokazu Nagatomo, J. Murakami, Logarithmic knot invariants arising from the restricted quantum group, International Journal of Mathematics (IJM), Issue: 10, 1203 --1213(2008) , 査読有
- ㉒ Masanobu Kaneko, On an extension of the derivation relation for multiple zeta values, "The Conference on L-functions", World Scientific, 89-94, (2007). 査読有
- ㉓ M. Chida, Masanobu Kaneko, On ordinary primes for modular forms and the theta operator, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 1001-1005. 査読有 <http://www.ams.org/journals/proc/2007-135-04/S0002-9939-06-08561-3/home.html>
- ㉔ C. Doran, Shinobu Hosono, On Stokes matrices of Calabi-Yau hypersurfaces, Adv. Theor. Math. Phys. 11 (2007), 147--174 . 査読有

[学会発表] (計 65 件)

- ① Kazuhiro Hikami, Superconformal algebra, mock theta function, and Mathieu moonshine Workshop "Low dimensional topology and number theory III" 九州大学西新プラザ, 2011.3.15
- ② Masa-Hiko Saito, Lagrangian fibrations on the moduli space of parabolic connections, Around twistor structures and nonabelian Hodge theory, SEDIGA Workshop, ENS, Paris, 2011.2.8
- ③ Masa-Hiko Saito, Moduli spaces of connections on curves and their canonical coordinates, 超幾何方程式研

究会 2011, 神戸大学理学部, 2011.1.6

- ④ Masa-Hiko Saito, The moduli spaces of stable parabolic λ -connections and their canonical coordinates (Joint works with M. Inaba and with S. Szabo), Moduli spaces of meromorphic connections, SEDIGA Workshop, ENS Paris, 2010.9.21
- ⑤ Masanobu Kaneko, "Values" of the elliptic modular j-function at real quadratic numbers, PANT-Kyoto 2010 (The Second PanAsian Number Theory Conference), RIMS, 京都大学, 2010.9.13-17
- ⑥ Masanobu Kaneko, 有限多重ゼータ値 mod p と多重ゼータ値の関係式, 多重ゼータ値の諸相, RIMS 研究集会, 京都大学 2010.9.6-9
- ⑦ Masanobu Kaneko, Multiple zeta values and poly-Bernoulli numbers, Math. Colloquium, Pusan National University, 2010.9.3
- ⑧ Kazuhiro Hikami, Asymptotics of Quantum Invariants MFO "Low Dimensional Topology and Number Theory", Oberwolfach, Germany, 2010.8.19
- ⑨ Kazuhiro Hikami, Superconformal Algebras and the Entropy of HyperKahler Manifolds Workshop "Prospects in q-series and modular forms", University College Dublin, Ireland, 2010.7.14
- ⑩ Masanobu Kaneko, Certain differential equation related to supersingular j-invariants and quasimodular forms, Quasimodular forms and applications, Besse Summer School 2010, Royal Poldavian Academy, Besse & Saint-Anastaise, Clermont-Ferrand, France, 2010.6.20-26
- ⑪ Masanobu Kaneko, Modular forms satisfying certain differential equation, Symmetry Plus Integrability 2010, The First International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Waves, in honor of Yuji Kodama's 60th birthday, South Padre Island, Texas, USA, 2010.6.10-14
- ⑫ Masa-Hiko Saito, Some topics on moduli theory of connections on curves, Seminaire d'Algebre, Topologie et Geometrie, Laboratoire J. A. Dieudonne, Universite de Nice Sophia-Antipolis, 2010.5.6
- ⑬ Masanobu Kaneko, Values of the j-function at real quadratics, in particular the Markoff irrationalities, The 24th Automorphic Forms Workshop,

- University of Hawaii, Honolulu, USA, 2010. 3. 22-26
- ⑭ Masanobu Kaneko, 楯岡モジュラーj 関数の実二次点での「値」とマルコフ二次無理数 (繁木伸孝と共同), 早稲田大学整数論研究集会, 2010. 3. 17-19
- ⑮ Masanobu Kaneko, Some experiments on the “values” of the elliptic modular j-function at real quadratics, Math-Info 2010, “Sage Days”, special session, CIRM, Luminy, France, 2010. 2. 26
- ⑯ Shinobu Hosono, BCOV ring and holomorphic anomaly equation}, BIRS Workshop, “Number theory and physics at the crossroads”, 2008.9, BIRS, Canada and International Conference of Mathematics, National Taiwan University, 2009. 7. 5 -10
- ⑰ Masanobu Kaneko, Observations on the “values” of the elliptic modular j-function at real quadratics, Internat. conference on the analytic theory of automorphic forms, at the 65th birthday of Roelof Bruggeman, Woudschoten, The Netherlands, 2009. 6. 15-19
- ⑱ Masa-Hiko Saito, Moduli theory of connections and Geometry of Riemann-Hilbert correspondences, (2009. 6. 16), RTG Graduate Summer School 'Geometry of quantum fields and strings', University of Pennsylvania, 2009. 6. 8-20
- ⑲ Masa-Hiko Saito, Deligne - Hitchin - Simpson's twistor spaces for non-compact case and degeneration of Painleve equations, 2008. 7. 13, Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XII, Shonan Village Center, 2008. 7. 12-16
- ⑳ Masa-Hiko Saito, A Calabi-Yau threefold with abelian fibration and $Z/2Z$ -action, 2008. 5. 30, String Phenomenology 2008, University of Pennsylvania, 2008. 5. 28 - 6. 1
- ㉑ Masa-Hiko Saito, Deligne - Hitchin - Simpson's Twistor space for non-compact case and a degeneration of Painleve VI equations, 2008. 4. 29, Workshop in Algebraic Geometry and Mathematical Physics, CUHK, 2008. 4. 28 - 30
- ㉒ Shinobu Hosono, Fourier-Mukai partners and Gromov-Witten invariants, Kobe workshop, 神戸大, 2008. 1; IPMU, 2008. 3; Workshop in algebraic geometry and physics, 2008. 4, CUHK, Hong Kong.
- ㉓ Yuichiro Taguchi, The non-existence of certain mod 2 Galois representations of some small quadratic fields, East Asia Number Theory Conference, KAIST, 大田, 2008. 1. 21
- ㉔ Masa-Hiko Saito, Moduli spaces of linear connections and Riemann-Hilbert correspondences, New developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror symmetry, RIMS, Kyoto, 2008. 1. 7
- ㉕ Yuichiro Taguchi, Introduction to the moduli theory of Galois representations, POSTECH-Japan Number Theory Mini Symposium, 浦項工科大学校, 2007. 11. 24
- ㉖ Yuichiro Taguchi, Introduction to p-adic Hodge Theory, II, Algebra Seminar, 慶北大學校, 大邱, 2007. 11. 22
- ㉗ Yuichiro Taguchi, Introduction to p-adic Hodge Theory, I, Algebra Seminar, 慶北大學校, 大邱, 2007. 10. 25
- ㉘ Yuichiro Taguchi, Moduli of Galois representations and their applications, P-adic method and its applications in arithmetic geometry, 2007, 東京大学, 2007. 6. 12
- ㉙ Shinobu Hosono, Mirror symmetry and Gromov-Witten invariants and Fourier-Mukai partners}, “Workshop of Algebraic Geometry and Physics 2007”, KIAS, Korea, 2007. 6
- ㉚ Yuichiro Taguchi, Problems on q-Specht modules, The 19th PNU-POSTECH Algebraic Combinatorics Seminar, 浦項工科大学校, 2007. 6. 2
- ㉛ Masa-Hiko Saito, Compactifications of Moduli spaces of stable parabolic connections and Riemann-Hilbert correspondences, MariusFest, Groningen, 2007. 4. 16-20
- ㉜ Yuichiro Taguchi, Local Fields: characteristic 0 vs. p, 談話会, Inha 大 学校, 2007. 4. 10

〔図書〕 (計 1 件)

- ① Masa-Hiko Saito, S. Hosono, K. Yoshioka (eds.), New Developments in Algebraic Geometry, Integrable System and Mirror Symmetry (Kyoto 2008) Advanced Studies in Pure Mathematics 59, Mathematical Society of Japan (2010)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金子 昌信 (KANEKO MASANOBU)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：70202017

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

小池 正夫 (KOIKE MASAO)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：20022733
田口 雄一郎 (TAGUCHI YUICHIRO)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：90231399
齋藤 政彦 (SAITO MASAHIKO)
神戸大学・理学部・教授
研究者番号：80183044
高田 敏恵 (TAKATA TOSHIE)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：40253398
細野 忍 (HOSONO SHINOBU)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：60212198
樋上 和弘 (HIKAMI KAZUHIRO)
鳴門教育大学・准教授
研究者番号：60262151

海外共同研究者

Don Zagier
ドイツ・マックスプランク研究所・教授