

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007～2009

課題番号：19340010

研究課題名 (和文) 代数解析的手法による代数群および量子群の表現論の研究

研究課題名 (英文) Research on representation theory of algebraic groups and quantum groups via algebraic analysis

研究代表者

谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70142916

研究成果の概要 (和文)：量子群は代数群の q 変形である。パラメータ q の値が 1 のべき根以外の場合には、その表現論はよくわかっているが、1 のべき根の場合には、既約表現の分類などの基本的な問題が未解決のまま残されている。研究代表者はこの場合に、 \mathbb{D} 加群の手法を用いて表現の研究を行い、微分作用素環の東屋性等の証明を得た。また分担者の兼田は正標数での微分作用素環について考察を行い、これを用いて正標数の代数群の表現論における進展をもたらした。

研究成果の概要 (英文)：Quantum groups are q -deformations of algebraic groups. When the parameter q is not a root of 1, its representation theory is well understood; however, when q is a root of 1, there still remain fundamental problems such as classification of irreducible modules which are not yet solved. The head investigator Tanisaki made research on it using the method of \mathbb{D} -modules, and obtained several results like the Azumaya property of certain rings of differential operators. The investigator Kaneda investigated the ring of differential operators in positive characteristics, and made progress in the representation theory of algebraic groups in positive characteristics.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2008年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2009年度	2,500,000	750,000	3,250,000
年度			
年度			
総計	8,200,000	2,460,000	10,660,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学

キーワード：群の表現論

1. 研究開始当初の背景

(1) 表現論は、代数・幾何・解析のいずれかを問わず様々な数学が交錯する場であり、

以前から多くの流れがあったが、代数解析学的手法の表現論への本格的な応用は、80年ごろから始まる。特に90年代における研究代表者と連携研究者の柏原正樹に

よる無限次元旗多様体上のD加群を用いたアフィン・リー代数の表現論の研究は、表現論に新たな視点をもたらした。これ以後D加群の理論を中心とする代数解析的（あるいは幾何学的）手法は表現論における一つの大きな潮流となっていた。

- (2) 近年の表現論における重要な対象として、量子群、量子旗多様体、アフィン・ヘッケ代数、えびら多様体等をあげることが出来るが、これらの代数解析的研究の進展が期待されていた。

2. 研究の目的

代数解析的方法による以下の課題の攻略が研究の目的である。

- (1) ベキ根における量子旗多様体上のD加群の研究
- (2) アフィン・ヘッケ代数の幾何学的表現論の研究
- (3) アフィン・リー代数の臨界レベルの表現論
- (4) えびら多様体を用いた量子群の表現論

3. 研究の方法

- (1) 「研究の目的」の項で述べた4つの課題それぞれについて、研究代表者、および研究分担者と連携研究者の一部が協力しつつそれぞれの視点のもとで研究を行った。
- (2) 国内での研究会に若手を中心とする研究者が参加するための旅費を援助した（約40件）
- (3) 代表者・研究分担者・連携研究者の海外出張旅費の援助を行った（3件）
- (4) 海外の研究者を招聘した（7件）

4. 研究成果

「研究の目的」の項で述べた4つの課題に関してそれぞれ以下のような成果が得られた。

- (1) 研究代表者が中心となって研究を行った結果、ベキ根における量子旗多様体上の微分作用素環の東屋性およびある種の部分多様体への制限の分裂東屋性が示された。またベイリンソン・バーンシュタイン型定理の証明が微分作用素環の高次コホモロジーの消滅から従うことが示された。これらの結果は、プレプリントとしてインターネット上では公開されている。
- (2) この方向での研究はあまり進展していない。ベズルーカブニコフ氏の未発表の結果があるようで、氏の来日時に討論を行った。方法論的に氏のものとは異なる攻略法を考えているのだが、討論から得るところもあり、証明すべき事項の定式化

まではできたので、今後さらに追求していきたい。

- (3) まだ研究の完成には至っていない。今後さらに追求していきたい。
- (4) 具体的には標準基底と半標準基底の関係に関して結果を得ることが課題であった。これが既約D加群とその特性サイクルの関係に一致するというのが自然な予想であり、実験的には正しそうであることを確認したが、証明には至っていない。

また、分担者と連携研究者はこれらとも関連する問題に取り組み、様々な成果をあげている。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計30件）

- ① Kaneda, Masaharu, The structure of Humphreys-Verma modules for projective spaces, J. Algebra 322 (2009), 237-244(査読あり).
- ② Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Schiffmann, Olivier, Geometric construction of crystal bases for quantum generalized Kac-Moody algebras. Adv. Math. 222 (2009), no. 3, 996--1015(査読あり).
- ③ Kashiwara, Masaki; Shimozono, Mark, Equivariant K-theory of affine flag manifolds and affine Grothendieck polynomials. Duke Math. J. 148(2009), no. 3, 501--538(査読あり).
- ④ Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre, Modules over deformation quantization algebroids: an overview. Lett. Math. Phys. 88 (2009), no. 1-3, 79--99(査読あり).
- ⑤ Naito, Satoshi; Sagaki, Daisuke, Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal. Adv. Math. 221 (2009), no. 6, 1804--1842(査読あり).
- ⑥ Göttsche, Lothar; Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kota, K-theoretic Donaldson invariants via instanton counting. Pure Appl. Math. Q. 5 (2009), no. 3, 1029--1111(査読あり).
- ⑦ Saito, Yoshihisa; Shiota, Midori, On Hecke algebras associated with elliptic root systems and the double affine Hecke algebras. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 45 (2009), no. 3,

- 845--905(査読あり).
- ⑧ Shoji, Toshiaki, Lusztig's conjecture for finite classical groups with even characteristic. Representation theory, 207--236, Contemp. Math., 478, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009(査読あり).
- ⑨ Shoji, Toshiaki; Wada, Kentaro, Product formulas for the cyclotomic v -Schur algebra and for the canonical bases of the Fock space. J. Algebra 321 (2009), no. 11, 3527--3549(査読あり).
- ⑩ Kaneda, Masaharu, Kapranov's tilting sheaf on Grassmannian in positive characteristic, Algebr. Represent. Theory 11(2008) 347-354(査読あり).
- ⑪ Ichino, Atsushi, Trilinear forms and the central values of triple product L-functions. Duke Math. J. 145 (2008), no. 2, 281--307(査読あり).
- ⑫ Ichino, Atsushi; Ikeda, Tamotsu, On Maass lifts and the central critical values of triple product L-functions. Amer. J. Math. 130(2008), no. 1, 75--114(査読あり).
- ⑬ Hiraga, Kaoru; Ichino, Atsushi; Ikeda, Tamotsu, Formal degrees and adjoint gamma-factors. J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), no. 1, 283--304(査読あり).
- ⑭ Kashiwara, Masaki, Equivariant derived category and representation of real semisimple Lie groups. Lecture Notes in Math., 1931, Springer, Berlin, 2008(査読あり).
- ⑮ Kashiwara, Masaki; Rouquier, Raphaël, Microlocalization of rational Cherednik algebras. Duke Math. J. 144 (2008), no. 3, 525--573(査読あり).
- ⑯ Kashiwara, Masaki; Nakashima, Toshiki; Okado, Masato, Affine geometric crystals and limit of perfect crystals. Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 7, 3645--3686(査読あり).
- ⑰ Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre, Constructibility and duality for simple holonomic modules on complex symplectic manifolds. Amer. J. Math. 130 (2008), no. 1, 207--237(査読あり).
- ⑱ Asashiba, Hideto, Domestic canonical algebras and simple Lie algebras. Math. Z. 259 (2008), no. 4, 713--754(査読あり).
- ⑲ Ariki, Susumu; Kreiman, Victor; Tsuchioka, Shunsuke, On the tensor product of two basic representations of $Uv(\mathfrak{sl}_e)$. Adv. Math. 218 (2008), no. 1, 28--86(査読あり).
- ⑳ Naito, Satoshi, Sagaki, Daisuke, Lakshmibai-Seshadri paths of level-zero shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations. Compos. Math. 144 (2008), no. 6, 1525--1556(査読あり).
- ㉑ Naito, Satoshi; Sagaki, Daisuke, A modification of the Anderson-Mirković conjecture for Mirković-Vilonen polytopes in types Band C. J. Algebra 320 (2008), no. 1, 387--416(査読あり).
- ㉒ Naito, Satoshi; Sagaki, Daisuke, Crystal structure on the set of Lakshmibai-Seshadri paths of an arbitrary level-zero shape. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 96 (2008), no. 3, 582--622(査読あり).
- ㉓ Göttsche, Lothar; Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, Instanton counting and Donaldson invariants. J. Differential Geom. 80 (2008), no. 3, 343--390(査読あり).
- ㉔ Nakajima, Hiraku, Sheaves on ALE spaces and quiver varieties. Mosc. Math. J. 7 (2007), no. 4, 699--722(査読あり).
- ㉕ Nakajima, Hiraku, Crystal, canonical and PBW bases of quantum affine algebras. Algebraic groups and homogeneous spaces, 389--421, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007(査読あり).
- ㉖ Shoji, Toshiaki, Generalized Green functions and unipotent classes for finite reductive groups. II. Nagoya Math. J. 188 (2007), 133--170(査読あり).
- ㉗ Shoji, Toshiaki, A variant of the induction theorem for Springer representations. J. Algebra 311 (2007), no. 1, 130--146(査読あり).
- ㉘ Kaneda, Masaharu; J. Ye, Equivariant localization of D -modules on the flag variety of the

symplectic group of degree 4, J. Algebra 309 (2007), 236-281(査読あり).

- ②⑨ Ichino, Atsushi, On the Siegel-Weil formula for unitary groups. Math. Z. 255 (2007), no. 4, 721--729(査読あり).
- ③⑩ Kashiwara, Masaki; Miemietz, Vanessa, Crystals and affine Hecke algebras of type D. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 83 (2007), no. 7, 135--139(査読あり).

[学会発表] (9件)

- ① T. Tanisaki, Differential operators on quantized flag manifolds at roots of 1, Algebraic Analysis and Beyond, 京都大学理学研究科, 2010. 3. 16
- ② T. Tanisaki, D-modules on quantized flag manifolds at roots of 1, International workshop on combinatorial and geometric approach to representation theory, Seoul National University, 2009. 9. 22
- ③ T. Tanisaki, Variations on a theme of Bezrukavnikov-Mirkovic-Rumynin. ゲーム理論と表現論 稚内北星学園大学, 2009. 8. 24
- ④ T. Tanisaki, D-modules on quantized flag manifolds at roots of 1, Workshop on Lie theory and representation theory II, 中国, East China Normal University, 2009. 7. 20.
- ⑤ T. Tanisaki, D-modules on quantized flag manifolds, Taipei workshop in Lie theory 2008, Academia Sinica, 台湾, 台北市, 2008. 12. 30
- ⑥ 谷崎俊之, リー代数と量子群の幾何学的表現論, 日本数学会年会 代数分科会特別講演, 近畿大学理工学部, 2008. 3. 25
- ⑦ 谷崎俊之, 量子旗多様体上のD加群, 第52回代数シンポジウム, 神戸大学百年記念館, 2007. 8. 6
- ⑧ T. Tanisaki, Differential operators on quantized flag manifolds at roots of 1, The 4th international conference on representation theory, 中国, チベット, Lhasa, 2007. 6. 20
- ⑨ T. Tanisaki, Symplectic manifolds arising from quantized enveloping algebras at roots of 1, 第10回代数群と量子群の表現論研究集会上智軽井沢セミナーハウス, 2007. 6. 1

[図書] (計1件)

- ① Hotta, Ryoshi; Takeuchi, Kiyoshi; Tanisaki, Toshiyuki, D-modules, perverse sheaves, and representation theory. Progress in Mathematics, 236. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. xii+407 pp. ISBN: 978-0-8176-4363-8

6. 研究組織

(1) 研究代表者

谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 70142916

(2) 研究分担者

兼田 正治 (KANEDA MASAHARU)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60204557

柏原 正樹 (KASHIWARA MASAKI)
京都大学・数理解析研究所・教授
(H20→H21: 連携研究者)

研究者番号: 60027381

庄司 俊明 (SHOJI TOSHIAKI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 40120191

(H20→H21: 連携研究者)

浅芝 秀人 (ASASHIBA HIDETO)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号: 70175165

(H20→H21: 連携研究者)

古澤 昌秋 (FYRUSAWA MASAOKI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 50294525

(H20→H21: 連携研究者)

有木 進 (ARIKI SUSUMU)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号: 40212641

(H20→H21: 連携研究者)

中島 啓 (NAKAJIMA HIRAKU)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号: 00201666

(H20→H21: 連携研究者)

内藤 聡 (NAITO SATOSHI)

筑波大学・大学院数理解析科学研究科・准教授

研究者番号: 60252160

(H20→H21: 連携研究者)

斉藤 義久 (SAITO YOSHIHISA)

東京大学・数理科学研究科・准教授

研究者番号: 20294522

(H20→H21：連携研究者)

市野 篤史 (ICHINI ATSUSHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：40347480

(H20→H21：連携研究者)

(3)連携研究者

なし