

機関番号：12601

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2007～2010

課題番号：19340014

研究課題名（和文）複素多様体の退化族における多重標準束と乗数イデアル層の研究

研究課題名（英文）Research on pluricanonical bundles and multiplier ideal sheaves for a degenerate family of complex manifolds

研究代表者

高山 茂晴（TAKAYAMA SHIGEHARU）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：20284333

研究成果の概要（和文）：滑らかな固有ケーラー射  $f: X \rightarrow Y$  と  $X$  上の中野半正なエルミートベクトル束  $(E, h)$  に対して、随伴束型のベクトル束  $K_{\{X/Y\}}(E)$  の高次順像層  $R^{qf_*}K_{\{X/Y\}}(E)$  は局所自由層であること、およびある自然なエルミート計量、ホッジ計量とよばれる、が定義されその曲率が中野半正であることを示した。さらに  $f: X \rightarrow Y$  が滑らかとは限らない場合にも  $f$  が滑らかな所での順像層の正值性が特異点集合をこえて拡張されることを示した。

研究成果の概要（英文）：For a smooth proper Kaehler morphism  $f: X \rightarrow Y$  and a Nakano semi-positive vector bundle  $(E, h)$  on  $X$ , we showed that every direct image sheaf  $R^{qf_*}K_{\{X/Y\}}(E)$  is locally free and that it is equipped with a natural Hermitian metric, called a Hodge metric, with Nakano semi-positive curvature. Moreover even when  $f: X \rightarrow Y$  can be singular, we showed that the positivity of a direct image sheaf extends across the singular locus of  $f$  on  $Y$ .

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2008年度	2,100,000	630,000	2,730,000
2009年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2010年度	2,300,000	690,000	2,990,000
年度			
総計	8,800,000	2,640,000	11,440,000

研究分野：複素幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：多重標準束、乗数イデアル層、退化族、ホッジ計量

## 1. 研究開始当初の背景

乗数イデアル層は1990年頃にKaehler幾何学の舞台上に登場し、その後Demailly(フランス)、Lazarsfeld(アメリカ)らによる基礎付けを経て、複素幾何学、代数幾何学において数多くの注目すべき結果に応用されてきた。本研究に関係するものでは、Siu(アメリカ)による代数多様体の多重種数  $\dim H^0(X, K_X(m))$  の変形不変性の証明において、コホモロジー消滅定理、大沢-竹腰による  $L^2$ -拡張定理と組み合わせて用いられた。そのSiu

の議論は川又により代数化され、高山、Hacon-McKernan(アメリカ)による一般型代数多様体の多重標準写像のある種の有界性に関する予想の証明にも応用された。さらにそこから、代数幾何学における基本予想であるフリップの存在定理がHacon-McKernanにより証明された。そしてさらなる応用が期待されていた。一方、Berndtsson(スウェーデン)は閉Kaehler多様体の滑らかな族  $f: X \rightarrow T$  と  $X$  上の半正な正則直線束  $L$  に対して、解析的な方法により

順像層  $f_*K_X(L)$  は自然に定まるホッジ計量により中野半正になることを示した。これは 1980 年頃に証明された藤田や川又の定理の、期待できる限りの強い一般化になっている。ただし、これは写像  $f$  が滑らかな場合であり、それが応用上の障害として残った。同時期に高山と海外研究協力者の Mourougane (フランス) は、Berndtsson とは独立に、Berndtsson の結果よりは少し弱い形の主張を証明していた。我々の方法は幾らか代数的な議論も取り入れているため、写像  $f$  が滑らかではない場合の解析も可能であり、より広範な幾何学的状況での応用が期待できるものであった。また Berndtsson は上述の彼の方法を推し進めることで、ある種の Kaehler 計量の空間の凸性を導いた。これらは近年、満洲、Donaldson (イギリス)、Tian (アメリカ) らにより活発に研究されている、定スカラー曲率 Kaehler 計量の存在と偏極多様体としての幾何学的不変式論の意味での安定性の関係においても新しいアプローチを与えるものであった。

## 2. 研究の目的

$f: X \rightarrow T$  を複素多様体間の固有正則写像で、代数的または Kaehler 的と仮定する。原点  $0$  以外では  $f$  は滑らかとし、中心ファイバー  $X_0 = f^{-1}(0)$  は多様体  $X_t = f^{-1}(t)$  の退化とみなす。  $X_0$  以外の各  $X_t$ 、または  $f$  が滑らかな所では、多重標準系  $|mK_{X_t}|$  の有界性、順像層  $f_*K_{X/T}$  の半正値性などの良い性質が知られている。研究の目的は、(1) 解析的：写像  $f$  が滑らかな所の  $X_t$  のいわゆるホッジ計量の  $t=0$  の近くでの退化または発散の様子を記述すること、(2) 幾何的：そのホッジ計量の退化の様子が多様体  $X_t$  の退化とどのように関係しているかを記述すること、そして (3) 代数的：それらが組  $(X, X_0)$  の乗数イデアル層とどのように関係しているのかを記述することである。これら各方面からの考察を総合して  $f: X \rightarrow T$  の大域的な構造を決定できるようにする。

## 3. 研究の方法

(1) 本研究は可換環論、代数幾何、複素幾何、多変数複素解析等の多岐の分野にわたる視点を必要とするため、広範囲の他の研究者グループとの活発な議論、最新情報の交換等を行う必要があった。連携研究者とは日頃からメール等により情報交換をし、主に国内で行われる研究集会などの際に研究打ち合わせを行った。1~2年目については基礎的な部分について、後半はさらに海外研究協力者の Mourougane 氏を交え、ホッジ計量の基本的な性質の研究、ホッジ計量による多様体の退化、モジュライ空間の研究を行い研

究成果としてまとめて行った。

(2) また研究期間の半ばと終盤に次の二つの研究集会を主催した。

①「Complex Geometry Workshop 2009 Tokyo」2009年2月13日~14日、於 東京大学。

海外から B. Berndtsson (スウェーデン)、M. Paun (フランス)、S. Boucksom (フランス) らを招聘し、国内からは大沢 健夫 (名大)、辻 元 (上智)、森脇 淳 (京大) らを講演者として招いた。相対多重標準束の順像層の研究、乗数イデアル層と拡張定理に関する研究などについて講演が行われた。

②「複素幾何学の諸問題」

2010年9月6日~9日、於 京大数理解研。

以下のような主旨で研究集会を行い、大成功をおさめた。集会の議事録を数理解析研究所講究録第1731巻としてまとめ各大学、研究所等に配布した。

複素幾何学の周辺分野から研究者を集め、各自の研究及びその背後・周辺にある基本的な問題意識、さらには大・中・小様々な問題について講演してもらい、討論を行う。若手研究者や院生のためにも、普通の研究集会では出会うことの少ない「手頃な」問題についても言及してもらおう。それにより問題意識の共有と若手の参入を助けることを目的とする。トピックとしては、複素力学系、特殊関数論、調和解析、Bergman 核、値分布論、CR 幾何、タイヒミュラー空間、Weil-Petersson 幾何、Kaehler-Einstein 幾何、モジュライ理論、Fano 多様体、Calabi-Yau 多様体、小平次元正の多様体、ベクトル束、Arakerov 幾何、正標数代数幾何、などが挙げられる。講演中でも討論に入るなどして、その場で新たな関連や問題を発見できるようにする。

## 4. 研究成果

(1) 滑らかな固有ケーラー射  $f: X \rightarrow Y$  と  $X$  上の中野半正なエルミートベクトル束  $(E, h)$  に対して、高次順像層  $R^q f_* K_{X/Y}(E)$  の正値性について研究し、次のような結果を得た。

定理 1. (a) 上の状況で、 $R^q f_* K_{X/Y}(E)$  は局所自由層である。

(b)  $w$  を  $X$  のケーラー形式とする。このとき  $w$  と  $h$  に関する  $R^q f_* K_{X/Y}(E)$  のホッジ計量  $g$  を定義することができて、その曲率は中野半正である。

関連する結果が代数幾何において知られているが、それは Griffiths 半正という正値性に対応していて、射  $f: X \rightarrow Y$  が滑らかな場合には、定理 1 が本質的な部分で強い結果になっている。定理 1 は初め  $q=0$  の場合に Berndtsson により得られたが、それとは独立に我々は少し弱い形の結果を得ていた。

それを受けて、次に研究すべき課題が幾つか考えられた。定理1はその一つである。問題点の一つは正しいホッジ計量  $g$  の定義であった。各ファイバー  $X_y = f^{-1}(y)$  上で  $w_y$  と  $h_y$  に関する  $E_y$  係数の調和  $(n, q)$  形式を考え、それに関する pairing は  $R^q f_* K_{X/Y}(E)$  にエルミート計量を定める。これは一見自然な定義に思えるが、実はそうではなかった。竹腰の定理により、単射  $S : R^q f_* K_{X/Y}(E) \rightarrow f_* \Omega_{X/Y}^{\wedge n-q}(E)$  が存在する。一方で  $f_* \Omega_{X/Y}^{\wedge n-q}(E)$  にはまさしく自然なホッジ計量  $g'$  がある。それは  $H^0(X_y, \Omega_{X_y}^{\wedge n-q}(E_y))$  の元  $u, v$  に対して、 $w_y^{\wedge n-q} \wedge u \wedge h_y v$  の  $X_y$  上の積分の定数倍で定まる。この  $g'$  を単射  $S$  で引き戻した  $g = S^* g'$  が考えるべきホッジ計量である。さらに別の竹腰による結果を合わせることで、先の Berndtsson による曲率の計算を一般化することができ、定理1を証明した。この結果を海外研究協力者の Mourougane 氏との共著としてまとめた。一方で、 $R^q f_* \Omega_{X/Y}^{\wedge n-q}(E)$  は局所自由性、および  $g'$  の曲率を求めることはできていない。一般には、これらは  $R^q f_* K_{X/Y}(E)$  と異なり、定理1のようには決定できないと思われる。

(2) 上述の研究成果を受け、固有ケーラー射  $f : X \rightarrow Y$  と  $X$  上の中野半正なエルミートベクトル束  $(E, h)$  に対して、高次順像層  $F = R^q f_* K_{X/Y}(E)$  の正値性について、これまでに得た結果をより一般化するような研究を行った。以下、記述があまり技術的にならないように  $F$  は局所自由であると仮定する。 $X$  のケーラー形式  $w$  を一つ固定する。 $p : P(F) \rightarrow Y$  を  $F$  に付随した射影空間束とし、 $L = \mathcal{O}(1)$  を普遍商直線束とする。自然な全射  $p^* F \rightarrow L$  がある。 $f$  はザリスキー開集合  $Y-D$  上では滑らかとする。上述(1)の研究から  $Y-D$  上では  $F$  は  $w$  と  $h$  に関するホッジ計量  $g$  により中野半正である。 $Y-D$  においては  $L$  に  $p^* g$  の商エルミート計量  $g_L$  を入れる。これは半正の曲率をもつ。研究成果は、この  $g_L$  が曲率が半正を保ったままで  $L$  全体の特異エルミート計量  $g_L$  に拡張できる、というものである。

これも関連する結果が代数幾何において知られている。この研究の独創的な点は、これまでの代数幾何的証明との違いにある。以下その違いについて述べる。代数幾何的証明ではホッジ構造の変形理論が鍵である。従って、ベクトル束  $E$  とのテンソル積は一般には考えられない、もしくは  $E$  が自明な場合に帰着できる設定でないといけない。一方、この研究ではホッジ構造の変形理論は用いない。さらに  $E$  が自明な場合に帰着できない設定でもよい。さらに  $F = R^q f_* K_{X/Y}(E)$

の半正値性はより具体的な、標準的に構成されるホッジ計量  $g$  により与えられている。代数幾何的証明では抽象的な半正値性のみである。この結果を海外研究協力者の Mourougane 氏との共著としてまとめた。

(3) 一方で代数的な固有射  $F : X \rightarrow Y$  の一般ファイバーの標準束が自明である場合に、その族の退化の様子を研究した。主な結果は次の通りである。

定理2.  $X_0 = \sum m_i F_i$  を特異ファイバーの既約分解とする。このとき

- (a) 各  $F_i$  は単線織か小平次元0であり、小平次元0のものは高々1つである。
- (b)  $X_0$  の既約成分が一つの場合には、それが単線織かそうでないかは特異点の様子から完全に判定できる。
- (c)  $X_0$  の既約成分の個数が2以上の場合には、相対標準因子は単線織な成分  $F_i$  たちを用いて表される。

主要な論点は特異ファイバーからある程度標準的に構成できる乗数イデアル層を調べ、それを用いて多重標準束の拡張定理を適用することにある。特異ファイバーの各既約成分上には多重標準形式が存在しないことを示すことで上記の結果が得られる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

- ① 高山 茂晴, 複素幾何学の諸問題, 京都大学数理解析研究所講究録第 1731 巻, 2011 年 3 月, 198 ページ. 査読無.
- ② Takagi S., Adjoint ideals along closed subvarieties of higher codimension. J. Reine Angew. Math. 641 (2010), 145-162. 査読有.
- ③ Ohsawa T., A tower of Riemann surfaces whose Bergman kernels jump at the roof. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 46 (2010), 473-478. 査読有.
- ④ Mourougane Ch. - Takayama S., Extension of twisted Hodge metrics for Kaehler morphisms, J. Differential Geom., 83, (2009), 131-161, 査読有.
- ⑤ Ohsawa T., A remark on Kazhdan's theorem on sequences of Bergman metrics. Kyushu J. Math. 63 (2009), 133-137. 査読有.
- ⑥ Mabuchi T., An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds. II. Osaka J. Math. 46 (2009), 115-139. 査読有.
- ⑦ Kurano K., Sato E., Anurag S. and

- Watanabe K., Multigraded rings, diagonal subalgebras, and rational singularities. J. Algebra 322 (2009), 3248-3267. 査読有.
- ⑧ Mourougane Ch. and Takayama S., Hodge metrics and the curvature of higher direct images, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 41, (2008), 905-924, 査読有.
- ⑨ Takayama S., On uniruled degenerations of algebraic varieties with trivial canonical divisor, Math. Z., 259, (2008), 487-501, 査読有.
- ⑩ Takayama S., On the uniruledness of stable base loci, J. Differential Geom., 78, (2008), 521-541, 査読有.
- ⑪ Takagi S., A characteristic  $p$  analogue of plt singularities and adjoint ideals. Math. Z. 259 (2008), 321-341. 査読有.
- ⑫ Mabuchi T., Chow-stability and Hilbert-stability in Mumford's geometric invariant theory. Osaka J. Math. 45 (2008), 833-846. 査読有.
- ⑬ Sato E., Hyperplane section principle of Lefschetz on conic-bundle and blowing-down. Kodai Math. J. 31 (2008), 307-322. 査読有.

[学会発表] (計 26 件)

- ① 満淵 俊樹; Kaehler-Einstein 幾何の問題、複素幾何学の諸問題、2010 年 9 月 9 日、京大数理研.
- ② 平地 健吾; C R 幾何の問題、複素幾何学の諸問題、2010 年 9 月 8 日、京大数理研.
- ③ 大沢 健夫; Bergman 核の問題、複素幾何学の諸問題、2010 年 9 月 7 日、京大数理研.
- ④ 高山 茂晴; Hodge metrics and the curvature of higher direct image sheaves, ICM2010 satellite conference ``Complex Geometry, Group Actions and Moduli Spaces'', 2010 年 8 月 14 日, Hyderabad, India.
- ⑤ 高山 茂晴; 高次順像層のホッジ計量について、2009 年 3 月 29 日、日本数学会、函数論分科会特別講演、東大.
- ⑥ 大沢 健夫;  $L^2$ -extendability from analytic subsets with singularities, Complex Geometry Workshop 2009 Tokyo, 2009 年 2 月 13 日、東大.
- ⑦ 高山 茂晴; On the extension of twisted Hodge metrics、複素幾何学シンポジウム、2008 年 10 月 23 日、長野県真田町.
- ⑧ 高山 茂晴; 多重標準形式の拡張とその応用、代数学シンポジウム、2008 年 8 月 6 日、盛岡市.
- ⑨ 高山 茂晴; ホッジ計量の拡張について、

Bergman 核と代数幾何への応用、2008 年 6 月 4 日、京大数理研.

- ⑩ 高山 茂晴; Boundedness of pluricanonical systems on algebraic varieties of general type, Algebraic Geometry and Commutative Algebra Tokyo 2007, 2007 年 12 月 12 日、東大.
- ⑪ 高山 茂晴; Hodge metrics and the curvature of higher direct images, Complex geometry in Osaka, 2007 年 11 月 2 日、阪大.
- ⑫ 高山 茂晴; Boundedness of pluricanonical systems on algebraic varieties of general type, Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces, 2007 年 9 月 4 日、北大.

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/takayama.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高山 茂晴 (TAKAYAMA SHIGEHARU)  
 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
 研究者番号: 20284333

### (2) 研究分担者; なし

### (3) 連携研究者

平地 健吾 (HIRACHI KENGO)  
 東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
 研究者番号: 60218790  
 今野 宏 (KONNO RIHOSHI)  
 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
 研究者番号: 20254138  
 高木 俊輔 (TAKAGI SHUNSUKE)  
 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
 研究者番号: 40380670  
 大沢 健夫 (OHSAWA TAKEO)  
 名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 30115802

満淵 俊樹 (MABIUCHI TOSHIKI)  
 大阪大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号: 80116102

佐藤 栄一 (SATO EIICHI)  
 九州大学・大学院数理科学研究科・教授  
 研究者番号: 10112278

林本 厚志 (HAYASHIMOTO ATSUSHI)  
 国立長野高専・一般科・准教授  
 研究者番号: 90342493

### (4) 海外研究協力者

Mourougane Christophe  
 フランス、レンヌ大学・教授