

平成 22 年 5 月 7 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19340016

研究課題名 (和文) 解析的捩率とモジュライ空間の幾何学

研究課題名 (英文) Analytic torsion and geometry of moduli spaces

研究代表者

吉川 謙一 (YOSHIKAWA KENICHI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：20242810

研究代表者の専門分野：複素幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：解析的捩率, K3 曲面, Calabi-Yau 多様体, Borchers 積, モジュライ空間

1. 研究計画の概要

(1) 対合付き K3 曲面の同変解析的捩率から構成される不変量が、モジュライ空間上の保型形式の Petersson ノルムで表示される事が筆者により示されていた。その保型形式の具体的な表示を求める。

(2) 3次元 Calabi-Yau 多様体に対して、解析的捩率を用いた不変量 (BCOV 不変量) を物理学者 Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa が提唱した。BCOV 不変量をモジュライ空間上の関数として具体的に記述する。

2. 研究の進捗状況

(1) K3 曲面上の対合の位相型は全部で 75 個存在し、従って 75 個のモジュライ空間が存在する。2009 年度までの研究により、46 個のモジュライ空間に対して不変量を計算した。特にモジュライ空間の次元が 9 以下の場合には全て決定した。この研究の結果、不変量がすべて一列の Borchers 積と井草による Siegel 保型形式の積として表示できるという共通の構造を持つことを発見した。

(2) ミラー 5 次超曲面, FHSV モデル, 及び例外型 Borcea-Voisin 多様体の場合に BCOV 不変量をモジュライ空間上の関数として決定した。この結果と A. Zinger によるミラー 5 次超曲面の楕円的 Gromov-Witten 不変量の計算と併せて、解析的捩率が楕円的 Gromov-Witten 不変量の B-モデルにおける対応物であるという Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa の予想がミラー 5 次超曲面の場合に解決された。

3. 現在までの達成度

(1) 当初の計画通りに進展している。
(理由) 同変解析的捩率から構成される保型形式の構造が、モジュライ空間の次元が 10 以下の場合にはほぼ決定でき、当初予想していた通りの構造を持つことが検証されたため。

(2) 当初の計画以上に進展している。
(理由) ミラー 5 次超曲面に対する Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa の予想が (Zinger の研究と併せて) 解決できたため。また、例外型 Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量の計算を通して、Del Pezzo 曲面の Kaehler モジュライ上に Borchers 積と類似の保型形式を発見し、同時に Harvey-Moore の予想もこの場合に解決できたため。

4. 今後の研究の推進方策

(1) Finashin-Kharlamov は対合付き K3 曲面のモジュライ空間を一つの頂点とし、モジュラー部分多様体としての包含に向き付けられた辺を対応させることで、K3 グラフと呼ばれる有向グラフを導入した。この有向グラフには 3 個の極大元が存在する。保型形式の擬制限と K3 グラフの辺が対応する事を示し、保型形式の構造の問題を 3 個の極大元の場合に帰着させる。

(2) Fano 多様体の反標準因子となる Calabi-Yau 多様体の場合に BCOV 不変量を Hilbert スキーム (この場合は射影空間) 上の関数として具体的に求める。また、例外型でない一般の Borcea-Voisin 多様体に対して

BCOV 不変量の構造を解明する。それを通して、ミラー 5 次超曲面以外の場合でも BCOV 予想を考える。我々の公式の副産物として、モジュライ空間の標準類を Hodge 類と境界因子の類を用いて表示する事ができる。その応用として、モジュライ空間の小平次元を決定する問題に取り組む。

5. 代表的な研究成果
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

- (1) 吉川謙一, "On the singularity of Quillen metrics", Math. Ann. 337, pp.61-89 (2007) 査読有
- (2) 吉川謙一, "Discriminant of certain K3 surfaces", Progress in Math. 255, pp.175-210 (2008) 査読有
- (3) 吉川謙一, "Real K3 surfaces without real points, equivariant determinant of the Laplacian, and the Borchers-function", Math. Zeit. 258, pp.213-225 (2008) 査読有
- (4) H. Fang, Z. Lu, 吉川謙一, "Analytic torsion for Calabi-Yau threefolds", J. Differential Geometry 80, pp.175-259 (2008) 査読有
- (5) 足利正, 吉川謙一, "A divisor on the moduli space of curves associated to the signature of fibered surfaces", Advanced Studies in Pure Math. 56, pp.1-34 (2009) 査読有
- (6) 吉川謙一, "Calabi-Yau threefolds of Borcea-Voisin, analytic torsion, and Borchers products", Asterisque 327, pp.351-389 (2009) 査読有

[学会発表](計 9 件)

- (1) "A duality between Del Pezzo and K3 surfaces?", International Conference on Geometry and Analysis on Manifolds, 陳省身数学研究所, 天津, 中国 (2007 年 4 月)
- (2) "K3 Surfaces, Analytic Torsion and Automorphic Forms", Short Program on Moduli Spaces of Riemann Surfaces and Related Topics, モントリオール大学数学研究センター, カナダ (2007 年 6 月)
- (3) "K3 Surfaces, Analytic Torsion and

Automorphic Forms", Modular Forms and Moduli Spaces, Euler 国際数学研究所, Saint-Petersburg, ロシア (2007 年 7 月)

- (4) "Analytic Torsion and Automorphic Forms", 15th Southern California Geometric Analysis Seminar, カリフォルニア大学アーバイン校, U.S.A. (2008 年 2 月)
- (5) "Analytic Torsion and Automorphic Forms", International Conference on Geometry and Analysis on Manifolds, カリフォルニア大学サンタバーバラ校, U.S.A. (2008 年 3 月)
- (6) "解析的捩率と保型形式", 日本数学会幾何学分科会幾何学賞受賞特別講演, (2008 年 3 月)
- (7) "Analytic Torsion and Automorphic Forms", Pacific Rim Complex Geometry Conference, ソウル, 韓国. (2008 年 7 月)
- (8) "Analytic torsion and invariants of K3 and Calabi-Yau manifolds", ICTS Program on Differential Geometric Methods in Algebraic Geometry, タタ研究所, Mumbai, 印度 (2009 年 4 月)
- (9) "An Introduction to Borchers Products", Holomorphically Symplectic Varieties and Moduli Spaces, Lille 大学, フランス (2009 年 6 月)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]
出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:

種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕