

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2007年～2011年

課題番号：19340016

研究課題名(和文) 解析的捩率とモジュライ空間の幾何学

研究課題名(英文) Analytic torsion and geometry of moduli spaces

研究代表者 吉川 謙一(YOSHIKAWA KEN-ICHI)
 京都大学・大学院理学研究科 教授
 研究者番号：20242810

研究成果の概要(和文)：3次元カラビ・ヤウ多様体の BCOV 不変量を研究し、幾つかの重要な場合にその明示公式を決定した。特筆すべき結果として、ミラー5次超曲面の BCOV 不変量を決定し、Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa の予想の一部を検証した事が挙げられる。また、例外型 Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量を決定し、その結果 Harvey-Moore の予想をこの場合に検証した事も特筆すべき結果である。これらの結果を得る為に Quillen 計量の退化の理論を整備し、特に一変数退化族に対して Quillen 計量の退化公式を決定した。

研究成果の概要(英文)：We studied the BCOV invariant of Calabi-Yau threefolds and we determined its explicit formula in some important cases. One of our major progresses is the determination of the BCOV invariant of quantic mirror threefolds, which verified some part of the conjecture of Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa. Another major progress is the computation of the BCOV invariant of Borcea-Voisin threefolds of exceptional type, which verified the conjecture of Harvey-Moore in these cases. To obtain these results, we studied the behavior of Quillen metrics for degenerating families of varieties. In particular, we determined the singularity of Quillen metrics for one-parameter degenerating families.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成19年	2,700,000	810,000	3,510,000
平成20年	2,400,000	720,000	3,120,000
平成21年	2,400,000	720,000	3,120,000
平成22年	2,257,520	720,000	2,977,520
平成23年	142,480	0	142,480
総計	9,900,000	2,970,000	12,870,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：複素解析幾何

1. 研究開始当初の背景

(1) 3次元カラビ・ヤウ多様体の楕円のグロモフ・ウィッテン不変量の母関数とそのミラー族の解析的捩率(BCOV不変量)との等価性が物理学者 Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa により予想されていた。特に、5次超曲面とミラー5次超曲面の場合に、予想の成否に興味を持たれていた。

(2) ミラー対称性とは別の弦双対性の帰結として、特別な構造を持つカラビ・ヤウ多様体に対して、楕円のグロモフ・ウィッテン不変量の母関数が一般化されたカツ・ムディー代数の分母関数を与えると予想されていた。(1)の楕円的ミラー対称性を信じれば、この予想は BCOV 不変量に対応するモジュライ空間上の正則切断が Borchers型の無限積展開を持つ事を意味する。弦双対性の検証とい

う意味でも、その予想を検証する事に興味を持たれていた。

2. 研究の目的

(1) 対合付き $K3$ 曲面の不変量 τ_M および対応する保型形式 Φ_M の構造を決定する。

(2) Borcea-Voisin 型のカラビ・ヤウ多様体の BCOV 不変量を決定し、Harvey-Moore の予想を Borcea-Voisin 多様体に対して検証する。

(3) 3 次元カラビ・ヤウ多様体の退化族に対して、その BCOV 不変量の漸近挙動を決定する。その応用として、BCOV 不変量がモジュライ空間で充たす大域的微分方程式を決定する。可能な場合にはその微分方程式を積分し、対応する正則切断を求める。

3. 研究の方法

(1) 井草の Siegel 保型形式を対合付き $K3$ 曲面のモジュライ空間に引き戻して得られる保型形式の零因子を決定する事により、 Φ_M と井草の Siegel 保型形式から定まる IV 型領域上の保型形式の因子を決定する。格子の性質によっては、保型形式の因子がヘーグナー因子である事から、その保型形式が Borchers 積である事が従う。

(2) 3 次元カラビ・ヤウ多様体の半安定退化を決定し、その場合に BCOV 不変量の退化挙動を特性類を用いて書き下す。

(3) モジュライ空間が対称領域の算術商であるような 3 次元カラビ・ヤウ多様体の例を見出し、その様な 3 次元カラビ・ヤウ多様体の BCOV 不変量がモジュライ空間上の保型形式で書ける事を示す。

4. 研究成果

(1) 3 次元カラビ・ヤウ多様体の解析的振率

物理学者 Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa により導入された解析的振率の適当な組み合わせを用いて、3 次元カラビ・ヤウ多様体の不変量 (BCOV 不変量) を構成した。さらに、高々通常二重点を持つ平滑化可能なカラビ・ヤウ多様体の倉西空間において BCOV 不変量がみたす微分方程式を決定し、カラビ・ヤウ多様体の一般の一変数退化族に対して BCOV 不変量の特異性が代数的であることを示した。以上の結果の応用として、ミラー 5 次超曲面カラビ・ヤウ多様体の BCOV 不変量を決定することができた。このようにして Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa が予想したミラー 5 次超曲面カラビ・ヤウ多様体の BCOV 不変量の明示公式を厳密に証明することができた。この研究結果は論文 (4) として出版

された。

(2) Quillen 計量の特異性の決定

ケーラー多様体の任意の一次元退化族とその上のベクトル束に対して、コホモロジーの行列式上の Quillen 計量の退化を決定することができた。さらに、Quillen 計量がパラメーターに関して漸近展開を持つことの証明も与えると同時に、その定数項を様々な二次特性類を用いて記述した。以上の結果は Bismut と筆者により知られていた結果の一般の退化への拡張を与える。また (1) の BCOV 不変量の退化の研究においても決定的な役割を果たす。この研究結果は論文 (6) として出版された。

(3) 実 $K3$ 曲面のラプラシアンと同変行列式

一般に実数体上で定義された $K3$ 曲面上に複素共役は反正則対合として作用するが、簡単のため複素共役が実点を持たない場合を考える。複素共役で不変なリッチ平坦計量と実数体上で定義された正則 2-形式を適当に選ぶとき、ラプラシアンの複素共役に関する同変行列式を Borchers Φ 関数を用いて表した。ただし、Borchers Φ 関数の値を考える点は、代数幾何学の意味での周期ではなく、シンプレクティック幾何学の意味での周期である。この研究は論文 (3) として出版された。

(4) 対合付き $K3$ 曲面の解析的振率

2004年に筆者が導入した対合付き $K3$ 曲面の不変量 τ_M の構造を研究した。ここで、 M は対合の位相型を表す $K3$ 格子の双曲型部分格子である。 M の階数が 17 以下である場合に、位相型 M の対合付き $K3$ 曲面のモジュライ空間上で、 τ_M はモジュライ空間上の保型形式のノルムとして表示できる事が筆者により示されていたが、本科研費とそれに引き続く科研費による研究の結果、階数に関する制限を撤廃する事ができた。また、階数が 11 以上または階数 10 でパリティが奇の双曲型部分格子に対して、 τ_M の構造定理を示し、対応する保型形式の明示公式を決定した。この研究結果は Crelle 誌と Math. Zeit. 誌に掲載決定している。

(5) Borcea-Voisin 多様体の解析的振率

3 次元カラビ・ヤウ多様体の BCOV 不変量を例外型 Borcea-Voisin 多様体の一列に対して決定した。その結果、この系列の Borcea-Voisin 多様体の BCOV 不変量は (4) の保型形式と Dedekind η 関数の積のノルムである。この系列の Borcea-Voisin 多様体のモジュライ空間は Del Pezzo 曲面のケーラー・モジュライとモジュラー曲線の直積であり、BCOV 不変量から Del Pezzo 曲面のケーラー・モジュライ上の保型形式が得られる。このようにして得られた保型形式は、ノルム (-1) ベクトルの定めるヘーグナー因子を特徴付ける Borchers 積である。この研究結果は論文 (2) として発表された。

(6) 松本-佐々木-吉田の $K3$ 曲面の判別式

松本-佐々木-吉田の $K3$ 曲面は対合付き $K3$ 曲

面の特別な場合である。この場合に、対合付きK3曲面の不変量を計算した。結論を述べると、不変量 τ_{M} は Freitag のデータ関数の積のノルムとして書け、また K3 曲面を定義する $(3, 6)$ 行列のすべての 3 次小行列式の積のノルムとも同一視される。この研究結果は論文 (5) として発表された。

(7) 代数曲線束の符号数

リーマン面上の代数曲線族の符号数に対応する因子を安定曲線のモジュライ空間上に定義し、その応用として今野一宏氏によるスロープ不等式の簡単な証明を与えた。この研究結果は論文 (1) として発表された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

(1) T. Ashikaga, K.-I. Yoshikawa, *A divisor on the moduli space of curves associated to the signature of fibered surfaces*, with an appendix by K. Konno, *Advanced Studies in Pure Math.* **56** (2009), 1-34, 査読有

(2) K.-I. Yoshikawa, *Calabi - Yau threefolds of Borcea - Voisin, analytic torsion, and Borchers products*, *Asterisque* **328** (2009), 355-393, 査読有

(3) K.-I. Yoshikawa, *Real K3 surfaces without real points, equivariant determinant of the Laplacian, and the Borchers Φ -function*, *Math. Zeit.* **258** (2008), 213-225, 査読有

(4) H. Fang, Z. Lu, K.-I. Yoshikawa, *Analytic torsion for Calabi - Yau threefolds*, *J. Differential Geometry* **80** (2008), 175-259, 査読有

(5) K.-I. Yoshikawa, *Discriminant of certain K3 surfaces*, *Progress in Math.* **255** (2008), 175-210, 査読有

(6) K.-I. Yoshikawa, *On the singularity of Quillen metrics*, *Math. Ann.* **337** (2007), 61-89, 査読有

[学会発表] (計 2 1 件)

(1) 吉川謙一, *Singularities and analytic torsion*, *Geometry and Analysis*, 京都大学 (2011 年 3 月 18 日)

(2) 吉川謙一, *Singularities and analytic torsion*, *Geometric quantization in*

noncompact setting, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, ドイツ (2011 年 2 月 15 日)

(3) 吉川謙一, *Elliptic J-function and Borchers Φ -function*, *Lattices, Reflection Groups and Algebraic Geometry*, 名古屋大学 (2010 年 11 月 25 日)

(4) 吉川謙一, *Elliptic J-function and Borchers Φ -function*, *代数幾何学シンポジウム*, 兵庫県立城崎大会議場 (2010 年 10 月 25 日)

(5) 吉川謙一, *Singularities and analytic torsion*, *The 6th Geometry Conference for Friendship of China and Japan*, Northwest University, 西安, 中国 (2010 年 9 月 5 日)

(6) 吉川謙一, *Analytic torsion and automorphic forms*, *代数学シンポジウム*, 北海道大学 (2010 年 8 月 10 日)

(7) 吉川謙一, *Analytic torsion of certain Calabi-Yau threefolds and Borchers product*, *Automorphic forms, Kac-Moody algebras and Strings*, The Max-Planck Institut fur Mathematik, ドイツ (2010 年 5 月 11 日)

(8) 吉川謙一, *Elliptic J-function and Borchers Φ -function*, *The 5th Franco-Japanese Symposium on Singularities*, Strasbourg University, フランス (2009 年 8 月 27 日)

(9) 吉川謙一, *An Introduction to Borchers Products (I), (II), (III)*, *Holomorphically Symplectic Varieties and Moduli Spaces*, Universite Lille 1, フランス (2009 年 6 月 2, 3, 5 日)

(10) 吉川謙一, *Analytic torsion and invariants of K3 and Calabi-Yau manifolds (I), (II), (III)*, *ICTS Program on 'Differential Geometric Methods in Algebraic Geometry'*, Tata Institute of Fundamental Research, インド (2009 年 4 月 14, 15, 16 日)

(11) 吉川謙一, *Analytic torsion and automorphic forms*, *Paris-Barcelone-Kyoto Seminar, IMJ*, Universite Paris VII, フランス (2009 年 3 月 19 日)

(12) 吉川謙一, *Elliptic J-function and Borchers Φ -function*, *The 4th Geometry*

Conference for Friendship of China and Japan, Chern Institute of Mathematics, 天津, 中国 (2008年12月24日)

(13) 吉川謙一, *Analytic Torsion and Automorphic Forms*, Pacific Rim Complex Geometry Conference, ソウル 韓国 (2008年7月28日)

(14) 吉川謙一, *Analytic Torsion and Automorphic Forms*, Torsion and Eta Forms, Universitat zu Koln, ドイツ (2008年6月6日)

(15) 吉川謙一, 解析的振率と保型形式, 日本数学会幾何学分会特別講演, 近畿大学 (2008年3月25日)

(16) 吉川謙一, *Analytic Torsion and Automorphic Forms*, International Conference on Geometry and Analysis on Manifolds, University of California Santa Barbara, U.S.A. (2008年3月15日)

(17) 吉川謙一, *Analytic Torsion and Automorphic Forms*, 15th Southern California Geometric Analysis Seminar, University of California Irvine, U.S.A. (2008年2月3日)

(18) 吉川謙一, *Analytic Torsion and Automorphic Forms*, Differential Geometry in Osaka, 大阪大学中之島センター, (2007年11月5日)

(19) 吉川謙一, *K3 Surfaces, Analytic Torsion and Automorphic Forms*, Modular Forms and Moduli Spaces, Euler International Mathematical Institute, ロシア (2007年7月3日)

(20) 吉川謙一, *K3 Surfaces, Analytic Torsion and Automorphic Forms*, Short Program on Moduli Spaces of Riemann Surfaces and Related Topics, Centre de Recherches Mathematiques, カナダ (2007年6月14日)

(21) 吉川謙一, *A duality between Del Pezzo and K3 surfaces?*, International Conference on Geometry and Analysis on Manifolds, Chern Institute of Mathematics, 天津, 中国 (2007年4月10日)

[図書] (計0件)
[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等
該当なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉川 謙一 (YOSHIKAWA KENICHI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 20242810

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

足利 正 (ASHIKAGA TADASHI)
東北学院大学・工学部・教授
研究者番号: 90125203

川口 周 (KAWAGUCHI SHU)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 20324600

金銅 誠之 (KONNDO SHIGEYUKI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 50186847

並河 良典 (NAMIKAWA YOSHINORI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80228080