

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2007～2010

課題番号：19340017

研究課題名(和文)

擬正則写像、フレアーコホモロジーの研究とシンプレクティック幾何への応用

研究課題名(英文)

Pseudo-holomorphic map and Floer cohomology and their applications to symplectic geometry

研究代表者：

太田 啓史 (OHTA HIROSHI)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：50223839

研究成果の概要(和文)：

2次元円盤からシンプレクティック多様体への擬正則な写像は、境界で円盤がちぎれる現象が起るため、シンプレクティック多様体の中のラグランジアン部分多様体に対するフレアーコホモロジーは一般には定義できない。ラグランジアン部分多様体に対し、 A 無限大代数とよばれるある代数を円盤からの擬正則写像を用いて構築し、それを基礎としてその障害と変形理論を展開した。我々の構築した一般理論をトーリック多様体の場合に適用し、具体的な計算例やシンプレクティック幾何の新しい応用をたくさん得ることができた。

研究成果の概要(英文)：

It is known that Lagrangian Floer cohomology can not be defined for general Lagrangian submanifolds, because of presence of bubbling off phenomena of holomorphic maps from 2-disc. We constructed a certain homotopy algebra, so called a filtered A infinity algebra, associated to each Lagrangian submanifold by using holomorphic maps from 2-disc, and established the obstruction theory and deformation theory based on the algebra. We applied our general theory to the case of toric manifolds and obtained many concrete new results in symplectic geometry.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2008年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2009年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2010年度	2,600,000	780,000	3,380,000
総計	10,100,000	3,030,000	13,130,000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：シンプレクティック幾何、フレアーコホモロジー、ミラー対称性予想、擬準同型写像、ハミルトン微分同相群、トーリック多様体、ポテンシャル関数、量子コホモロジー

1. 研究開始当初の背景

本研究課題の連携研究者でもある深谷賢治氏(京大)、小野薫氏(北海道大)、および Yong-Geun Oh氏(米国ウイスコンシン大)と1996年以来行なっている共同研究により、ラグランジアン部分多様体を境界条件とする擬

正則円盤のモジュライ空間を用いてラグランジアン Floer コホモロジー理論の障害理論と変形理論を展開してきた。その一般基礎理論は本研究課題開始の2007年度時には概ね完成しており、それを改訂しつつ最終的に仕上

げる段階であった。一般論はおよそ満足いくものになりそうであったが、一方において具体的な計算例や応用が乏しく、模索していたものの、実際には難しい問題で新しいよい応用例を見いだせずにはいた。したがって、本研究課題の大きな目標は、ラグランジアン Floer コホモロジー理論の障害理論と変形理論の一般基礎理論を完成させることおよび、具体的な計算例を見つけシンプレクティック幾何への具体的な応用を得ること、の2点に集約することができる。

2. 研究の目的

以上の背景のもと、当初予定した研究目的のいくつかは以下にあげるものである。

(1) まず、ラグランジアン Floer コホモロジー理論の障害理論と変形理論の一般基礎理論の論文を完成させ出版すること。

(2) (1)の理論のシンプレクティック幾何への具体的な応用。例えばミラー対称性予想への応用を研究すること。

(2)についてももう少し詳しく述べる。

(2-1) トーリック多様体の場合にフレアーコホモロジーを計算する。このとき、トロピカル幾何との関係を追求し、トロピカル幾何を用いて計算された正則円盤の数え上げを用いるか、あるいは位相頂点の方法を我々の立場で定式化しなおし計算を行なう予定であった。

(2-2) トーリック多様体の場合のミラー対称性予想への応用。

(2-3) スペクトラル不変量との関係を調べ、ハミルトン微分同相群の構造解明への応用。

などが、具体的に応用として想定されていた研究目的である。

3. 研究の方法

研究目的(1)については、細部の最終チェックを行なうことに時間と労力を費やすのみである。

研究目的(2)について。トーリックファノ多様体の場合には Cho-Oh による擬正則円盤の詳しい解析がある。ファノでない場合も込めて我々はポテンシャル関数を定義しているので非正バブル球面の効果を取り入れてファノとは限らないトーリック多様体の場合に話を一般化することが可能と思われる。

このとき、ポテンシャル関数の臨界点が非消滅フレアーコホモロジーをもつラグランジアントーラスファイバーを意味する。アンビエントのシンプレクティック多様体のサイクルを用いて、ラグランジアン部分多様体から決まる A_{∞} 代数を変形することができる(バルク変形)が、バルク変形を用いてよりたくさんの(バルク変形された)ポテンシャル関数の臨界点を探すことも有効なほうほうである。また、一般のトーリック多様体の場合に計算ができれば、次のステップとして多様体がトーリック多様体にトーリック退化した状況を考えることも一つの研究方法である。

4. 研究成果

研究目的(1)に関しては、2009年にアメリカ数学会と International Press が共同で出版している Studies in Advanced Mathematics のシリーズの第 46-1, 46-2 巻の2巻本(総ページ数805ページ)として、ラグランジアン Floer コホモロジー理論の障害理論と変形理論の一般基礎理論に関する研究成果を出版することができた。当初予定していた10章のうち、出版社からのページ制限のため、2章分を削らざるを得なかった。それらについては別の形であらためて出版することとなった。

研究目的(2)について。項目(2-2)と(2-3)についてはたいへん大きな進展が得られ、専らその研究に集中した。特に、トーリック多様体への応用は予想以上の成果が得られたといえる。

具体的には以下の通り: Landau-Ginzburg スーパーポテンシャル関数を我々の理論の中で捉え、幾何学的な意味付けに成功したことは大きい。応用として、トーリック多様体には必ず non-displaceable ラグランジアンファイバーが存在することや、複素射影曲面の2点以上のブローアップには非可算無限個の(互いにハミルトンアイソトピックでない) non-displaceable ファイバーの存在例を見つけたことは特筆すべき成果である。後者は、研究の方法の項目で触れた「バルク変形」を用いた顕著な応用例である。また、最終年度には任意の滑らかなコンパクトトーリック多様体の大量子コホモロジー環と、我々のポテンシャル関数のヤコビ環とが環同型になることが証明できた。これは、任意のコンパクトトーリック多様体の場合に、環同型のレベルでのミラー対称性予想を解決したことを意味し、たいへん大きな成果といえる。同型写像は我々の一般理論で導入された開閉写像を用いた幾何学的に定義されるもので、同型の証明は単に両者を計算して一致することをみるという計算によるものではなく、幾何学的に構成された写像が同型写像を導

くという概念的な証明となっている。

また、トーリック退化を用いた研究として、2次元流面の2つの直積上に非可算無限個の non-displaceable な(互いにハミルトンアイソトピックでない) ラグランジアントーラスが存在することがわかった。これは次数2のあるヒルツェブルフ曲面をトーリック退化させたものを平滑化した多様体上で我々のフレアー理論を考察することによる。鍵となることはファノではないネフのトーリック曲面に対してポテンシャル関数を完全に決定したことである。

Entov-Polterovich などによる先行研究においては一種の存在定理として、non-displaceable なラグランジアンが存在はいえたとしても、具体的にどれが non-displaceable かを同定することについては無力であったが、我々の研究ではポテンシャル関数の臨界点を求め、その付値を考えることで non-displaceable なラグランジアンを明示的に同定することができることも、大きなアドバンテージである。

更に、以上の非消滅フレアーコホモロジーに関する結果は、ハミルトン系のフレアーコホモロジーにバルク変形をいれたものおよび大量子コホモロジーを通して、Oh, Entov-Polterovich, McDuff, Schwarz らによるスペクトラル不変量への顕著な応用も得られた。例えば、任意のコンパクトトーリック多様体のハミルトン微分同相群の普遍被覆からの非自明な擬準同型が必ず存在すること、複素射影曲面の2点以上のブローアップや先の2次元流面の2つの直積の場合には non-displaceable なラグランジアントーラスに対応して、それらの場合に、ハミルトン微分同相群の普遍被覆から独立な非可算無限個の擬準同型が存在することが示せる。これは研究目的(2-3)に対する研究結果である。

以上は、深谷賢治氏(京都大)、小野薫氏(北海道大)および Yong-Geun Oh 氏(ウイスコンシン大)との共同研究の成果である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,
Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds II: bulk deformations.
Selecta Mathematica (New Series) (掲載決定・印刷中). P.103 (2010). 査読有

② Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,
Anchored Lagrangian submanifolds and their Floer theory. Contemp. Math. vol 527, 15--54. (2010). 査読有

③ Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,
Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I. Duke Math. J. vol 151, 23--175. (2010). 査読有

④ Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,
Canonical models of filtered
 \mathbb{A}_{∞} algebras and Morse complexes.
CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., vol 49. 201--227. (2009). 査読有

⑤ Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,
An inequality for symplectic fillings of the link of a hypersurface K3 singularity.
Banach Center Publications. vol 85, 93--100. (2009). 査読有

⑥ Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,
Examples of isolated surface singularities whose links have infinitely many symplectic fillings. J. Fixed Point Theory and Applications. vol 3, 51--56. (2008). 査読有

[学会発表] (計 18 件)

① Hiroshi Ohta, Mirror symmetry for toric manifolds and Lagrangian Floer theory. (International Workshop on Symplectic Geometry and Topology, Kyoto Univ.) 2011年2月14日

② Hiroshi Ohta, Bulk deformations and non-displaceable Lagrangian fibers in toric manifolds.
(研究集会「トポロジーの現在と未来」, 箱根強羅). 2010年12月21日

- ③ Hiroshi Ohta, Mirror symmetry for toric manifolds and Lagrangian Floer theory. (研究集会「トポロジーの現在と未来」, 箱根強羅). 2010年12月20日
- ④ Hiroshi Ohta, Mirror symmetry for toric manifolds. (International Workshop on Noncommutative Geometric Approach to Index Theory on Singular Spaces, Kansai Seminar House, Kyoto) 2010年10月20日
- ⑤ Hiroshi Ohta, Toric A_∞ model \Leftrightarrow Landau-Ginzburg B_∞ model. (研究集会「Geometry and Something」, 福岡大セミナーハウス). 2010年10月9日
- ⑥ Hiroshi Ohta, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry for toric manifolds. (Symplectic Geometry Seminar, Seoul National University, Korea.) 2010年9月14日
- ⑦ Hiroshi Ohta, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry for toric manifolds. (The 5th Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference 2010, Nagoya, Japan.) 2010年7月26日
- ⑧ Hiroshi Ohta, Anti-symplectic involution and Floer cohomology. (Conference on Mirror Symmetry and Gromov-Witten theory, National Institute of Mathematical Sciences, Seoul, Korea.) 2010年1月12日
- ⑨ Hiroshi Ohta, Lagrangian intersection Floer theory -- I. Foundation, II. Calculations. (Mathematics-String Seminar at IPMU, Kashiwa, Japan). 2009年8月19日
- ⑩ Hiroshi Ohta, Lagrangian Floer theory in toric case. (1-st East Asian Symplectic Conference 2009, Academia Sinica, Taipei, Taiwan). 2009年5月7日
- ⑪ Hiroshi Ohta, On Saito's theory for Laurent polynomials and the potential functions. (研究集会「斎藤理論のつっこんだ研究会」, 函館 2008年12月4日
- ⑫ Hiroshi Ohta, The potential function and intersection rigidity in toric manifolds. (研究集会「Geometry and Something」, 福岡大セミナーハウス). 2008

年11月22日

- ⑬ Hiroshi Ohta, On signature of moduli spaces of ASD connections. (研究集会「Hodge 理論、退化、特異点の代数幾何とトポロジー」, 東北学院大)

2008年3月11日

- ⑭ Hiroshi Ohta, Some observation on symplectic fillings of the links of singularities of general type. (研究集会「接触幾何, 特異点論およびその周辺」, 金沢大学サテライト・プラザ). 2008年1月23日

- ⑮ Hiroshi Ohta, Proof of Whitehead theorem in A_∞ algebras. (AIM Workshop on Toward Relative Symplectic Field Theory, The City University of New York, New York, USA.) 2007年9月20日

- ⑯ Hiroshi Ohta, Symplectic fillings and normal singularities. (Algebraic Topology: Old and New, Postnikov Memorial Conference, Stefan Banach International Mathematical Center, Bedlewo, Poland.) 2007年6月21日

[図書] (計2件)

- ① Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono, Lagrangian Intersection Floer Theory--Anomaly and Obstruction- Part I. AMS/IP Studies in Advanced Math. vol 46-1, American Mathematical Society and International Press. (2009). 396 ページ.

- ② Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono, Lagrangian Intersection Floer Theory--Anomaly and Obstruction- Part II. AMS/IP Studies in Advanced Math. vol 46-2., American Mathematical Society and International Press. (2009). 409 ページ.

[産業財産権]

○出願状況 (計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:

国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

太田 啓史 (OHTA HIROSHI)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：50223839

(2) 研究分担者

菅野 浩明 (KANNO HIROAKI)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：90211870

(3) 連携研究者

深谷 賢治 (FUKAYA KENJI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30165261

小野 薫 (ONO KAORU)

北海道大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：20204232