様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月１６日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究（Ｂ）
研究期間：2007～2010
課題番号：１９３４００１８
研究課題名（和文）　可微分写像の大域的特異点論とその応用

研究課題名（英文） Global Theory of Singularities of Differentiable Maps and its Applications
研究代表者
佐伯　修（SAEKI　OSAMU）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：３０２０１５１０

研究成果の概要（和文）：多様体間の可微分写像に現れる特異点を大域的観点から研究し，その特異点と多様体の微分位相幾何学的性質について種々の新しい知見を得た．たとえば，多くの位相的４次元多様体の上には無数の可微分構造があることが知られているが，そのうちで特異点が簡単な写像を許容する可微分構造は一意的であることが示された．またそうした大域的研究が特異点の局所的研究に役立つ例も発見した．こうして，写像の特異点や特異ファイバーと，多様体や写像の同境類の間の深い関係を明らかにし，多くの具体的成果を得た．

研究成果の概要（英文）：We studied singularities of differentiable maps between manifolds from a global point of view and obtained various new results about such singularities and differential topological properties of manifolds. For example, it is known that many 4-dimensional topological manifolds admit infinitely many differentiable structures, and we have proved that among them there is only one such structure that allows the existence of a differentiable map with the simplest singularities. We also discovered some examples of global results that can be used to study local singularities. In this manner, we have clarified the deep relationship between the singularities (or singular fibers) of maps and the cobordism classes of manifolds and maps, obtaining a lot of explicit and concrete results.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	2,300,000	690,000	2,990,000
２００８年度	2,100,000	630,000	2,730,000
２００９年度	2,800,000	840,000	3,640,000
２０１０年度	2,800,000	840,000	3,640,000
年度			
総　計	10,000,000	3,000,000	13,000,000

研究分野：位相幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分トポロジー、大域的特異点論、可微分構造、同境、特異ファイバー、ホモトピー原理、多様体対、可視化

1．研究開始当初の背景
　多様体間の可微分写像やその特異点についての研究は，20 世紀中ごろの Whitney や Thom に始まり，その後大きな発展を遂げた．特に可微分写像の局所的性質（ある点のまわりでの性質）が多く研究され，現在では多くの理論・道具

が確立されている．しかし，多様体の本質的構造に関わる大域的性質（写像全体としての性質）の研究は，重要であるにもかかわらずあまりなされてきていなかった．

一方，可微分多様体論に関しては，1970 年代までに5次元以上の高次元多様体論がかなり発展し，その中で興味深い事実が次々と発見されていった．特に一つの位相多様体の上に複数の可微分構造が入り得ることが多くの例とともに発見され，微分位相幾何学の世界に大きな衝撃を与えた．さらに最近では 4 次元多様体に関する研究が進み，上のような現象が高次元に比べるとさらに頻繁に起こり，むしろその方が自然であるという状況すら明らかにされてきている．しかし可微分構造の分類といった重要な問題は未解決のまま残されていた．

このように可微分多様体論は盛んに研究されてきたわけであるが，可微分写像の大域的特異点論の立場からの研究は，重要であるにもかかわらずほとんどなされてきていなかった．その大きな理由の一つとして，たとえばMorse関数を使っても，多様体の可微分構造に関する情報の多くは失われてしまう，ということが挙げられよう．ところが近年，研究代表者らのグループによる研究により，実数に値を取る関数ではなく，多様体に値を取る写像とその特異点を本質的に用いることにより，可微分構造に関する情報が取り出せる例が発見された．これらの結果により，可微分構造の究明に，多様体間の写像とその特異点の研究が大変重要であることがあらためて浮き彫りになったと言える．

しかしながら，こうした研究にはまだまだ解決すべき問題が山積している．それは，特異点の局所的性質とは本質的に異なる種々の興味深い現象が大域的研究の中で発見されてきているものの，そうした事柄を大きな枠組みの中で統括的に扱えるような理論が未だに現われていなかったことからもうかがえる．

2．研究の目的

本研究では，大域的特異点論の種々の重要な未解決問題を，これまでにない統一的観点から，より大きな枠組みの中で解決してゆくことを目的とした．さらに，そうした結果を応用して，微分位相幾何学の種々の重要な問題を解決することが目的であった．

なお残念ながら，「可微分写像の大域的特異点論」の専門家は，国内的にも国際的にも少ない．上記目的を実現に向かわせるためには，それぞれほぼ独立に種々の観点から研究を行っている国内の大域的特異点論の研究者が，互いに緊密な連絡を取り合い，統一的観点からの研究を進めてゆく必要が生じる．本研究ではそうした研究者を分担者・連携研究者に加えることにより，国際的視野から見て，規模的にもレベル的にもしっかりしたグループを国内に構築することも目的であった．

3．研究の方法

（1）多様体の可微分構造と写像の特異点の関係について．

これまでの佐伯，佐久間等の研究により，定値折り目特異点のみを持つ写像（これをスペシャル・ジェネリック写像と呼ぶ）を許容するかどうかは，多様体の可微分構造に依存することがわかっている．一方この結果は，特異ファイバーの観点から，「特別な特異ファイバーのみを持つ可微分写像を許容するかどうかは，多様体の可微分構造に依存する」と言い換えることもできる．そこで本研究では特異ファイバーに着目し，多様体の可微分構造との関係について調べた．なお，余次元が負の場合に，特異値の逆像に沿った写像芽を特異ファイバーとここでは呼んでいる．

上記のことを実行に移すために，種々の状況で特異ファイバーの分類が必要である．そのためには局所特異点の分類作業も必要となる．

一方，余次元が非負のとき，写像は埋め込みやはめ込みに近い性質を持つ．たとえば，与えられた多様体が埋め込めるユークリッド空間の次元は多様体の可微分構造に依存することが知られている．このことは，可微分構造により消去できる特異点とできないものがあることを示唆している．そこで，埋め込み・はめ込み理論と，特異点の消去理論を駆使し，特異点の消去可能性と可微分構造の関係について調べた．

（2）多様体対の研究．

ここでは可微分多様体とその部分多様体を与えたとき，その対と位相空間対として同相であるが，微分同相とはならないような多様体対を念頭に置いている．たとえば古典的には，そのようなものが無限個あることがHaefligerによって示されている．

一般に上記のような二つの多様体対が与えられると，部分多様体を埋め込み写像の像と考えたとき，それらを結ぶ可微分写像の族が存在する．それが特異点を持たなければイソトピーとなってしまうので，必然的に特異点が現れる．そこで本研究ではそうした特異点を調べ，それらの点での多様体対の可微分構造の変化を追ってゆくことにより，特異点と多様体対の可微分構造の関係を調べた．

（3）特異点・特異ファイバーの消去のためのホモトピー論的障害の研究．

Gromov-Eliashbergや安藤によるホモトピー原理により，特異点の消去問題は，ある種の束に対する切断の存在問題と同等となる．ただし，これらは通常の局所特異点に対するものであり，特異ファイバーの消去問題がこのようなホモトピー原理に従うかどうかは未だに知られていない．最近 Rimányi-Szűcs や Kazarian らにより特異写像の分類空間が構成された．これらを用いれば，与えられた特異ファイバーを同境の範囲で消去

できるかどうかはホモトピー論的な問題に置き換わる．そこで本研究では分類空間的なものを用い，ある種の「束」で，切断の存在が特異ファイバーの消去と同等となるものを構成し，さらにそのホモトピー論的構造を具体的な状況で調べ，特異ファイバーのホモトピーによる消去のための障害を決定する計画であった．

(4)多様体，及び多様体対の不変量の構成．

これまでの佐伯の研究により，特異ファイバーの普遍複体のコホモロジーから，特異写像の同境不変量が得られることがわかっている．一方スペシャル・ジェネリック写像の同境群が，自然にホモトピー球面のｈ 同境群に同型となることも佐伯の研究でわかっているが，これは特異写像の同境類が可微分構造の情報を担っていることを意味する．そこで特別な特異ファイバーに着目し，対応する写像の同境群が多様体の可微分構造にどのように関わるか，普遍複体の研究を駆使して研究する計画であった．なおこうした研究には後述の具体的構成論の研究が重要な役割を担うことが予想され，その部分との連携研究が必要となる．また多様体対については，対応する埋め込み写像を考えることにより，古典的結び目に対する Vassiliev 型不変量と類似の不変量が定義できる．こうした不変量の研究はこれまでにいくつかあるが，可微分構造を反映するような不変量は未だに発見されていない．そこで部分多様体を埋め込み写像の像と考えるだけではなく，ある多様体対への写像の逆像と考えることにより，特異ファイバーも含めたより大きな範囲の対象に不変量を定義することを試みる計画であった．

(5)ジェネリック写像の具体的かつ組織的な構成理論について．

ジェネリックな写像は与えられた多様体間に豊富に存在するが，特異点や特異ファイバーも具体的にわかる形で与えられることは大変まれである．一方上述の(4)の項目で言及したように，多様体や写像の不変量の性質を調べるためには，具体例での計算が必要不可欠である．そこで本研究では，具体的なジェネリック写像の組織的構成理論を構築する計画であった．そのためには，多様体上の Morse 関数をいくつか組み合わせたり，既存の写像とはめ込み・埋め込み・沈めこみ等のわかりやすい写像との合成を考える等の方法がまず考えられる．さらに，特異ファイバーを貼り合せることにより写像を構成し，後で多様体の微分同相類を決定する方法もある．後者の方法を組織的に運用するには，特異ファイバーが大域的に貼り合うための条件をしっかり決定する必要がある．

(6)多様体の微分幾何学的構造の特異構造への一般化．

最近，どんな 4 次元多様体上にも折り目状の特異点を持つシンプレクティック構造が入ることが証明され，さらにどんな 4 次元多様体もケーラー多様体に分解できることが示された．また特異点を持った波面に対して微分幾何学が展開されることも最近示されている．このように微分幾何的な概念が特異点を許す状況にまで拡張されている．そこで本研究では，上述の我々の研究の応用として，可微分写像の特異点を用いて，種々の微分幾何学的構造を特異構造へと一般化し，それを用いて多様体の分解定理などの証明を試みる計画であった．また，幾何的な構造を持った多様体上の可微分写像を考え，その特異ファイバーの上に誘導される構造を考えることにより，特異ファイバーを幾何構造もこめた対象と考えることにより，より深い幾何的対象を生み出すことも研究の対象とした．

4．研究成果

可微分写像の特異ファイバーに着目し，可微分構造との関係について調べるため，種々の状況で特異ファイバーの分類をまず行うのが当初の計画であった．これについては，既存の場合より対象とする写像の範囲を広げ，さらに分類の基準となる同値関係を整備した．特に，これまで多重写像芽にしか定式化されていなかった K-同値の概念は，特異ファイバーに沿った写像芽に対しても定式化される．それによる分類を行って Pontrjagin—Thom 構成を適用することにより，特異ファイバーの分類空間が構成できることも分かっている．そこで本研究ではこの K-同値による分類のための準備を，山本卓宏の協力を得て行った．また，特異点消去のためのホモトピー論的障害の研究を当初の計画にあるように進め，ある種の次元対に対して，与えられた多様体が折り目写像を許容するための障害類を，Postnikov 分解の観点から明らかにすることに成功した．さらに，特異写像の同境分類についても関連して研究し，円周への Morse 写像の同境群を，曲面への安定写像のカスプ消去の方法を用いて完全に決定することに成功した．この結果の応用として，平面へのジェネリックな写像芽の安定摂動に現れるカスプの，符号付き個数の位相不変性を示すことができた．また，定値折り目特異点の消去を利用して，4 次元多様体上に折り目付き Lefschetz 束が構成できることに気が付いた．これは 4 次元多様体上のシンプレクティック幾何学や微分構造の理論とも密接に関係する．今後はこれを発展させて，当初の重要な目的の一つである，ジェネリックな写像の組織的構成に貢献できる可能性が高い．

特異ファイバーの大域的な消去可能性と可微分構造の関係について，同境理論の観点，及びホモトピー論的障害類の観点から研究を押し進めるため，ハンガリーの Szűcs 氏に専門的知識の提供をお願いするとともに，研究連絡を行った．その結果，写像芽の場合において，そうした同境理論や，障害類の定式化に関する新たな知見を得た．これは今後，特異ファイバーの場合を研究するための大きな指針となる，重要

な知見である．また，多様体の微分幾何的構造の特異構造への一般化として，特に，4 次元多様体上の Lefschetz 構造を，特異点を持ったものにまで対象を拡張することを考えた．その研究のため，Baykur 氏を招へいし，研究連絡を行った結果，以前に我々が得ていた結果を解釈しなおすことにより，それが既にそうした拡張に関する良い結果を与えていることが判明した．すなわち，これまでに特異点論的観点から写像の特異点の消去を考えてきたが，それが特異 Lefschetz 束構造の研究に役立つことが明らかになったのである．このことは，既存の研究の今後の大きな方向性を指し示している点で大変興味深い．また，特異写像を用いて 4 次元同境群についても研究を行い，複素射影平面が自然な生成元となる無限巡回群であることを，まったく新しい観点から証明することにも成功した．その結果，既存の，特異ファイバーによる符号数公式に新しい証明を与えることもできた．このアイデアは，特異ファイバーのまわりに多様体を対応させるものであり，特異写像の同境の研究にこうしたアイデアが使えることが十分に期待できる．

多様体の可微分構造と可微分写像の特異点の関係について調べるため，その最も基本的な場合として，定値折り目特異点しか持たないスペシャル・ジェネリック写像について研究した．閉多様体の場合については既存の研究があったため，特に可微分構造が豊富にある 4 次元開多様体の場合について詳しく調べ，スペシャル・ジェネリック写像を許容することが，多様体の可微分構造を決定することを多くの場合に示すことに成功した．また，4 次元多様体上の安定写像の特異ファイバーを用いることで，4 次元有向同境群が無限巡回群となることの新しい証明を得た．さらにその系として，特異ファイバーを用いた 4 次元多様体の符号数公式の，新しく，しかも見通しの良い証明を得た．また，曲面上の高さ関数であって，臨界値をちょうど 3 つ持つものについて，その臨界点の個数の実現問題に取り組み，完全な解答を得た．

可微分多様体間の可微分写像について，多様体と写像のファイバーの位相との関係について調べるため，Hiratuka 氏と共同研究を行い，写像の商空間のホモロジー群とファイバーの連結成分の同境類の間に深い関係があることを明らかにした．また，それに関連して，可微分写像に関する新しいオイラー標数公式をいくつか得た．さらに，曲面上の，必ずしも Morse 関数とは限らない可微分関数の Reeb グラフについて研究を行い，Reeb グラフとして得られる有限グラフの完全な特徴づけを得ることに成功した．また，4 次元多様体上の Lefschetz 束構造を，特異点を持ったものにまで対象を広げて考えたクラスである broken Lefschetz 束構造について研究を行い，その存在性の新たな証明を与えるとともに，その変形理論について新たな知見を得た．また，Brieskorn 型多項式の複素孤立特異点のまわりに現れる高次元結び目の同境類に関して Blanlœil 氏と共同研究を行い，ある仮定のもとで，そうした結び目の同境類が多項式の指数を完全に決定することを示した．さらに，Nascimento 氏と，等質空間内の曲線と1パラメータ部分群による軌道との接触について共同研究を行い，それによってリー環に部分空間の列が定義でき，それを用いた幾何学的不変量の定式化が可能であることを明らかにした．さらに，こうした可微分写像の特異点論を，多値関数データのための視覚的データ解析（データの可視化）に応用することについて，高橋成雄氏と共同研究を行い，可微分写像の特異ファイバーの理論が，そのようなコンピュータサイエンスの理論に応用できることが明らかになった．

以上のように，本研究により，十分な成果が得られたということができる．

5．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 18 件）

① V. M. do Nascimento and <u>O. Saeki</u>, Curves in homogeneous spaces and their contact with 1-dimensional orbits, Geometriae Dedicata, pulished on-line, DOI: 10.1007/s10711-010-9571-y，2011，査読有．

② Y. Masumoto and <u>O. Saeki</u>, A smooth function on a manifold with given Reeb graph, Kyushu J. Math. 65 (2011), 75–84, 査読有．

③ F. Morishita and <u>O. Saeki</u>, Height functions on surfaces with three critical values, J. Math. Soc. Japan 63 (2011), 153–162, 査読有．

④ <u>O. Saeki</u>, Singular fibers and 4-dimensional cobordism group, Pacific J. Math. 248 (2010), 233–256, 査読有．

⑤ <u>O. Saeki</u>, Special generic maps on open 4-manifolds, J. of Singularities 1 (2010), 1–12, 査読有．

⑥ R. Sadykov, <u>O. Saeki</u> and <u>K. Sakuma</u>, Obstructions to the existence of fold maps, to appear in J. London Math. Soc., Published online on January 21, 2010, 査読有．

⑦ K. Ikegami and <u>O. Saeki</u>, Cobordism of Morse maps and its application to map germs, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 147 (2009), 235–254, 査読有．

⑧ <u>佐伯修</u>，可微分写像の特異ファイバーのトポロジー，数学 60 (2008), 46–67, 査読有．

⑨ J. Hiratuka and <u>O. Saeki</u>, Number of singularities of stable maps. J. Geometry 89

(2008), 53-69, 査読有.

⑩ Y. Ando, The homotopy principle for maps with singularities of given K-invariant class, J. Math. Soc. Japan 59 (2007), 557-582, 査読有.

⑪ N. Iwase and T. Miyauchi, Lusternik-Schnirelmann category of stunted quasi- projective spaces, J. Math. Kyoto Univ. 47 (2007), 321-326, 査読有.

⑫ N. Iwase and A. Kono, Lusternik-Schnirelmann category of Spin(9), Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 1517-1526, 査読有.

⑬ M. Yamamoto, Lifting a generic map of a surface into the plane to an embedding into 4-space, Illinois J. Math. 51 (2007), 705-721, 査読有.

〔学会発表〕(計 29 件)

① 佐伯修, 多値関数データのための位相に基づく視覚的データ解析,「拡がっていく数学」 平成 22 年度 数学・数理科学と諸科学・産業技術分野の連携ワークショップ《CGによる可視化と数学》, 2011年3月7日, 学術総合センター(東京都).

② O. Saeki, Topology of definite fold singularities, 第6回代数・解析・幾何学セミナー, 2011年2月16日, 鹿児島大学理学部.

③ O. Saeki, Connected components of regular fibers of differentiable maps, Topology of singularities and related topics, II, 2011年1月8日, 東北大学川井ホール.

④ O. Saeki, Elimination of definite fold and broken Lefschetz fibrations, 研究集会「4次元トポロジー」, 2010年11月16日, 広島大学.

⑤ O. Saeki, Cobordism of algebraic knots defined by Brieskorn polynomials, 空間認識のための特異点論, 2010年6月3日, 伊勢市観光文化会館.

⑥ 佐伯修, Special generic maps on open 4-manifolds, 研究集会「4次元トポロジー」, 2010年1月18日, 広島大学.

⑦ 佐伯修, Special generic maps on open 4-manifolds, 可微分写像の特異点論とそれに関連する幾何学, 2009年12月7日, 日本大学文理学部.

⑧ 佐伯修, Singular fibers of differentiable maps and 4-dimensional cobordism group, トポロジーと写像の特異点, 2009年6月3日, 信州大学.

⑨ 佐伯修, Singular fibers of differentiable maps and 4-dimensional cobordism group, 研究集会「4次元トポロジー」, 2009年1月26日, 広島大学.

⑩ O. Saeki, Cobordism of Morse maps and its application to map germs, The second Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities, RIMS, Kyoto, 2007年11月28日.

⑪ 佐伯修, 特異点と特性類 — 具体例の果たす重要な役割, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会企画特別講演, 2007年9月21日, 東北大学.

⑫ T. Ohmoto, Computing Milnor numbers via Thom polynomials, Niigata workshop on Complex Geometry and Singularities, クロスパル新潟, 2007年8月20日.

〔図書〕(計 1 件)

① 若山正人編, 若山正人, 谷口説男, 福本康秀, 金子昌信, 二宮嘉行, 佐伯修著, 岩波書店, 技術に生きる現代数学 2008, 210 ページ(175－204)

〔その他〕

ホームページ等

http://imi.kyushu-u.ac.jp/~saeki/res.html

6. 研究組織

(1)研究代表者

佐伯 修(SAEKI OSAMU)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号:30201510

(2)研究分担者

佐久間 一浩(SAKUMA KAZUHIRO)
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号:80270362
(H20～H22:連携研究者)

大本 亨(OHMOTO TORU)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号:20264400
(H20～H22:連携研究者)

岩瀬 則夫(IWASE NORIO)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号:60213287
(H20～H22:連携研究者)

小林 真人(KOBAYASHI MAHITO)
秋田大学・大学院工学資源学研究科・准教授
研究者番号:10261645
(H20～H22:連携研究者)

山本 稔(YAMAMOTO MINORU)
愛知教育大学・教育学部・講師
研究者番号:40435475
(H20～H22:連携研究者)

安藤 良文(ANDO YOSHIFUMI)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号:80001840

(H20～H21:連携研究者)
高山　晴子(TAKAYAMA　HARUKO)
九州大学･大学院数理学研究院･助教
研究者番号:90274430
(H20:連携研究者)

(3)連携研究者

高瀬　将道(TAKASE　MASAMICHI)
信州大学･理学部･准教授
研究者番号:30447718
(H21)
山本　卓宏(YAMAMOTO　TAKAHIRO)
九州産業大学･工学部･講師
研究者番号:60435972
(H21)
高田　敏恵(TAKATA　TOSHIE)
九州大学･大学院数理学研究院･准教授
研究者番号:40253398
(H22)
奥間　智弘(OKUMA　TOMOHIRO)
山形大学･地域教育文化学部･准教授
研究者番号:00300533
(H22)