

平成 22 年 4 月 10 日現在

研究種目：基盤研究 (B)  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19340028  
 研究課題名 (和文) 偏微分方程式の未知境界・係数同定逆問題の再構成スキームの研究  
 研究課題名 (英文) Reconstruction schemes for inverse problems identifying unknown coefficients and boundaries for partial differential equations

## 研究代表者

中村 玄 (Nakamura Gen)  
 北海道大学・大学院理学研究院・教授  
 研究者番号：50118535

研究成果の概要 (和文)：1) 散乱の逆問題、2) thermography、3) 流体方程式の逆問題 に対して、新しい再構成スキームや各種再構成スキームの関連、包括的枠組を与えた。

研究成果の概要 (英文)：For 1) inverse scattering problems, 2) thermography, 3) inverse problems for equations in fluids, some new reconstruction schemes and an framework which integrates several known reconstruction schemes are given.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	7,500,000	2,250,000	9,750,000
2008 年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
2009 年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
年度	0	0	0
年度	0	0	0
総計	14,500,000	4,350,000	18,850,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：逆問題、散乱、thermography、流体方程式

## 1. 研究開始当初の背景と研究の目的

偏微分方程式の逆問題とは、偏微分方程式が与えられている領域の未知境界や偏微分方程式の未知係数を、散乱データや領域の既知境界における観測 (以下観測データとよぶ) などから決定する問題であり、工学の分野をはじめとして数理科学に広く内在する基本的な問題としてその解析が求められている。偏微分方程式の未知境界同定問題や未知係数同定 (決定と同義語) 問題の応用面に於ける典型例としては、材料・構造物内の亀

裂などの形状や材料内部の物理特性を非破壊的に調べる非破壊検査法の数理を挙げることが出来る。

本研究では、逆問題として上に述べたような偏微分方程式の未知境界同定問題と未知係数同定問題との的をしぼり、未知境界や未知係数を観測データから構成するスキーム (以下逆問題の解の再構成とよぶ) について研究する。また、本研究で取り上げる逆問題は、何れもすでに研究代表者とその共同研究者達により一定の成果が得られ、現在研究が

進行中のものばかりであり、本研究でそれらを一層発展させる事を目的としている。

## 2. 研究成果

1) 散乱の逆問題、2) thermography、3) 流体方程式の逆問題 に対して、以下のような研究成果を得ることが出来た。

### 1) 散乱の逆問題：

この約 15 年余りの間に未知障害物等による波の散乱の逆問題の再構成法、即ち各方向から入射した入射波の散乱波の遠方場から未知障害物を求める手続きが幾つも提案された。代表的なものは、linear sampling method, factorization method, probe method, singular sources method, no-response test, range test, enclosure method である。これまで、これらの再構成法は独立に研究され、相互の関係は知られていなかった。研究代表者は、no-response test と range test が同等であること、そしてこの二つを統合した枠組みの中に他の方法が関連づけられることを示した。(雑誌論文 13)

ところで linear sampling method は、もっとも古く、簡便な方法であるため工学者にも使われるほどよく知られた方法である。しかし数学的には厳密性を欠くばかりでなく、他の方法に比べて不十分な所がある。例えば、未知障害物の未知音響インピーダンスの同定は、その絶対値の最大値しか同定出来ない。研究代表者は、この linear sampling method の持つ欠点を改善する新しい方法として、singular sources method の linear sampling method 版とも言うべき方法を提案した。即ち、singular sources method の基本解に相当するものとして、interior transmission boundary problem の基本解とその特異性を用いることにより singular sources method が、linear sampling method においても展開できることを示した。この研究の中で、これまで知られていなかった特異性構造の分かる interior transmission problem の基本解を構成することに成功したことは特筆に値する。(プレプリント)

有限個の入射波に対する散乱波の遠方場から未知障害物を同定する問題は、散乱の逆問題の基本的な問題であり、その研究は 40 年近い歴史を持つ。しかしこの問題は、未だに未解決である。研究代表者は、この問題に対して次の結果を得た。即ち、散乱を記述する方程式の係数が未知障害物の近くで解析であり、未知障害物の境界の滑らかさについて非解析的であることを仮定すれば、この問題は肯定的に解けることを示した。しかも同定の一意性が示せるだけでなく再構成法も

与えることが出来る。(プレプリント)この結果により、この問題は未知境界の滑らかさが区分的に解析的な場合に示すことに帰着されることが分かる。

### 2) Thermography の数理：

近年の thermography の発展は目を見張るものがある。それは赤外線カメラの性能の飛躍的向上にある。実際最近の赤外線カメラは、1/50 K の精度で物体表面の温度を、高速に測ることが可能である。active thermography では、heater や flash lamp による熱負荷を与え、このときの物体表面の heat flux を熱流束計で計測し、物体表面温度を赤外線カメラで計測する。そしてこれらの計測結果から逆解析により、物体内の未知介在物等を同定するのが、active thermography である。

まず一回の計測で未知介在物のサイズを評価する逆問題について研究した。即ち、物体表面の一部を冷却し、物体表面の他の所を heater で一定時間熱流束を与えると同時に、その結果生じる物体表面の温度を計測して得られる計測結果から、物体内の未知介在物のサイズを評価する逆問題を、理論と数値実験の両面から研究した。この場合、物体内温度は時間指数的に定常温度に近づく。そこで物体表面の一部が冷却されている場合に、定常状態の未知介在物のサイズ評価を行い、非定常状態においても一定時間経過後は、このサイズ評価が有効であることを示した。サイズ評価には、計測データから定義されるある種の指標関数を用いて行うことができる。数値実験では、この指標関数と未知介在物のサイズ、位置、形状との相関関係について調べた。(雑誌論文 3)

flush lamp を用いた active thermography の計測は極めて短時間で行われ、熱は急速に拡散され、熱を負荷する以前の状態に戻るため、この場合の計測は多重回繰り返すことが可能である。しかもこれらの計測データを重ね合わせる事が可能であるので、物体表面上に任意の heat flux を加え、その結果生じる物体表面の温度が計測可能と理想化して構わない。つまり物体表面上に定義される Neumann-Dirichlet map が計測データとして与えられるものとして構わない。研究代表者は、この Neumann-Dirichlet map を計測データとしたときに、この計測データから物体内の未知介在物等を同定する dynamical probe method と呼ばれる再構成法を確立し、その有効性を数値実験により検証した。(Annali Normal Superior Pisa 掲載予定)、(J. Computational Math. 掲載予定)

dynamical probe method には、これまで知

られていなかった不連続係数を持つ熱作用素に対する基本解の空間勾配の各点評価を必要とする。介在物が接していない場合には、Ladyzenskaya-Rivkind-Uralceva (Tudy Mat. Inst. Stekov., 92(1966)132-166)の解の内部評価の議論を修正するか、または不連続係数を持つ発散型楕円型方程式(系)に対する解の勾配の各点評価の議論を、不連続係数を持つ熱作用素に適応する議論を構築することにより示すことが出来る。

### 3) 流体方程式の逆問題

圧縮性流体方程式系や Boussinesq 方程式系が未知ソース項を持つとき、その未知ソース項をこれらの方程式の解の最終時刻における情報から求める逆問題について研究した。この逆問題の解を求める問題は、ある非線形積分作用素の不動点を求める問題に帰着できる。不動点の存在証明は、Tikhonov の不動点定理を用いて行った。この研究が示すように多くの場合、非線形方程式(系)に対する逆問題の解を求める問題は、ある非線形写像の不動点を求める問題になると思われる。そして不動点を求めるには、Schauder の不動点定理よりも Tikhonov の不動点定理の方が簡便で有効であることが分かった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 23 件)

- 1) Lin, Ching-Lung; Nakamura, Gen. Conditional stability for the hexagonal anisotropic elastic dynamical systems. *Comm. Partial Differential Equations* 34 (2009), no. 10-12, 1251-1264.
- 2) Fan, Jishan; Nakamura, Gen. Well-posedness of an inverse problem of Navier-Stokes equations with the final overdetermination. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 17 (2009), no. 6, 565-584.
- 3) Lei, Yi; Di Cristo, Michele.; Nakamura, Gen. Size estimates in thermography. *Appl. Anal.* 88 (2009), no. 6, 831-846.
- 4) Fan, Jishan; Jiang, Yu; Nakamura, Gen. Inverse problems for the Boussinesq system. *Inverse Problems* 25 (2009), no. 8, 085007, 10 pp.
- 5) Daido, Yuki; Lei, Yi; Liu, Jijun; Nakamura, Gen. Numerical implementations of dynamical probe method for non-stationary heat equation. *Appl. Math. Comput.* 211 (2009), no. 2, 510-521.
- 6) Cheng, Jin; Liu, Jijun; Nakamura, Gen; Wang, Shengzhang, Recovery of multiple obstacles by probe method. *Quart. Appl. Math.* 67 (2009), no. 2, 221-247.
- 7) Nakamura, Gen; Watanabe, Michiyuki; Kaltenbacher, Barbara, On the identification of a coefficient function in a nonlinear wave equation. *Inverse Problems* 25 (2009), no. 3, 035007, 16 pp.
- 8) Fan, Jishan; Nakamura, Gen, Local solvability of an inverse problem to the density-dependent Navier-Stokes equations. *Appl. Anal.* 87 (2008), no. 10-11, 1255-1265.
- 9) Lin, Ching-Lung; Nakamura, Gen; Sini, Mourad, Unique continuation for the elastic transversely isotropic dynamical systems and its application. *J. Differential Equations* 245 (2008), no. 10, 3008-3024.
- 10) Nakamura, Gen; Jiang, Yu; Nagayasu, Sei; Cheng, Jin, Inversion analysis for magnetic resonance elastography. *Appl. Anal.* 87 (2008), no. 2, 165-179.
- 11) Nakamura, Gen; Wang, Shengzhang; Wang, Yanbo, Numerical differentiation for the second order derivatives of functions of two variables. *J. Comput. Appl. Math.* 212 (2008), no. 2, 341-358.
- 12) Nakamura, Gen; Watanabe, Michiyuki, An inverse boundary value problem for a nonlinear wave equation. *Inverse Probl. Imaging* 2 (2008), no. 1, 121-131.
- 13) Honda, Naofumi; Potthast, Roland; Nakamura, Gen; Sini, Mourad, The non-response approach and its relation to non-iterative methods for the inverse scattering. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 187 (2008), no. 1, 7-37.
- 14) Nakamura, Gen; Yoshida, Kazuki. Identification of a non-convex obstacle for acoustical scattering. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 15 (2007), no. 6, 611-624.

- 15) Gawinecki, Jerzy August; Sikorska, Beata; Nakamura, Gen; Rafa, Józef. Mathematical and physical interpretation of the solution to the initial-boundary value problem in linear hyperbolic thermoelasticity theory. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 87 (2007), no. 10, 715--746.
- 16) Nakamura, Gen; Sini, Mourad. Obstacle and boundary determination from scattering data. SIAM J. Math. Anal. 39 (2007), no. 3, 819--837.
- 17) Daido, Yuki; Kang, Hyeonbae; Nakamura, Gen. A probe method for the inverse boundary value problem of non-stationary heat equations. Inverse Problems 23 (2007), no. 5, 1787--1800.
- 18) Choi, Cheok; Nakamura, Gen; Shirota, Kenji. Variational approach for identifying a coefficient of the wave equation. Cubo 9 (2007), no. 2, 81--101.
- 19) Morassi, Antonio; Nakamura, Gen; Shirota, Kenji; Sini, Mourad. A variational approach for an inverse dynamical problem for composite beams. European J. Appl. Math. 18 (2007), no. 1, 21--55.
- 20) Liu, Jijun.; Nakamura, Gen; Sini, Mourad. Reconstruction of the shape and surface impedance from acoustic scattering data for an arbitrary cylinder. SIAM J. Appl. Math. 67 (2007), no. 4, 1124--1146 (electronic).
- 21) Liu, Jijun; Nakamura, Gen; Potthast, Roland. A new approach and error analysis for reconstructing the scattered wave by the point source method. J. Comput. Math. 25 (2007), no. 2, 113--130.
- 22) Fan, Jishan; Jiang, Song; Nakamura, Gen. Vanishing shear viscosity limit in the magnetohydrodynamic equations. Comm. Math. Phys. 270 (2007), no. 3, 691--708.
- 23) Lin, Ching-Lung; Nakamura, Gen; Wang, Jenn-Nan. Three spheres inequalities for a two-dimensional elliptic system and its application. J. Differential Equations 232 (2007), no. 1, 329--351.

[学会発表] (計 15 件)

- 1) 中村 玄、Mathematical analysis for thermal non destructive testing、2010年3月24日～3月27日 日本数学会年会、慶應義塾大学矢上キャンパス
- 2) 中村 玄、本多 尚文、M. Sini、Analytic extension and reconstruction of obstacles for elliptic operators、2010年3月24日～3月27日 日本数学会年会、慶應義塾大学矢上キャンパス
- 3) 江 渝、中村 玄、生体粘弾性に関するデータ解析、2010年3月8日、日本応用数理学会 2010年研究部会連合発表会、筑波大学
- 4) 中村 玄、MREによる生体弾性率測定法の数理、ワークショップ「変分法と領域摂動」、2010年2月11日～2月13日、神戸インスティテュート
- 5) 中村 玄、Inverse Problems for Reconstructing the Medium Discontinuity、数理科学セミナー、2009年9月21～23、大阪電気通信大学寝屋川キャンパス
- 6) Jiang, Yu; Nakamura, Gen; Fujiwara, Hiroshi, Asymptotic Analysis for Magnetic Resonance Elastography, International conference on Inverse Problems and its Applications, Aug.19, 2009, Hanbat National University, Daejeon, Korea
- 7) Nakamura, Gen, Inverse Problems for Reconstructing the Medium Discontinuity, Applied Inverse Problems, July 24, 2009, Vienna
- 8) Honda, Naofumi; Nakamura, Gen; Mourad, Sini, Analytic Extension and Reconstruction of Obstacles from Few Measurements for Elliptic Second Order Operators, July 6--10, 2009, Univ. South Wales, Sydney
- 9) 江 渝、中村 玄、藤原宏志、MREに関する漸近解析、第 58 回理論応用力学講演会、2009年6月10日、日本学術会議
- 10) 江 渝、中村 玄、藤原宏志、Asymptotic analysis for magnetic resonance elastography、2009年 日本数学会、3月26日～3月29日、東京大学駒場キャンパス
- 11) Isakov, Victor; Kim Kyoungsun; Nakamura, Gen. Reconstruction of an unknown inclusion by thermal imaging, ECOMAS, July 2, 2008, Venis
- 12) 渡辺 道之、中村 玄、B. Kaltenbacher

- r, On the identification of a coefficient function in a nonlinear wave equation, 2008年3月23日～3月26日、日本数学会年会、近畿大学
- 13) K. Kim、中村 玄、V. Isakov、Reconstruction of an unknown inclusion by thermal imaging, 2008年3月23日～3月26日、日本数学会年会、近畿大学
- 14) 中村 玄、吉田一樹、Identification of a non-convex obstacle for acoustical scattering, 2007年9月21日～24日、日本数学会秋季総合分科会、東北大学
- 15) 中村 玄、江 渝、永安 聖、程 晋、MRE による弾性係数と粘性係数の同定法の数理、2007年9月21日～24日、日本数学会秋季総合分科会、東北大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村 玄 (Nakamura, Gen)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：50118535

### (2) 研究分担者

本多 尚文 (Honda, Naofumi)  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号：00238817

利根川 吉廣 (Tonegawa, Yoshihiro)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：80296748

(研究分担者：H19年度→H20年度)

平良 和昭 (Taira, Kazuaki)  
筑波大学・数理物質科学研究科・教授  
研究者番号：90016163

(研究分担者：H19年度)

筑波大学 / 数理物質科学研究科 / 教授

磯崎 洋 (Isozaki, Hiroshi)  
筑波大学・数理物質科学研究科・教授  
研究者番号：90111913

(研究分担者：H19年度)

山本 昌宏 (Yamamoto, Masahiro)  
東京大学・大学院数理科学研究所・教授  
研究者番号：50182647

(研究分担者：H19年度)

代田 健二 (Shirota, Kenji)  
愛知県立大学・情報科学部・准教授  
研究者番号：90302322

(研究分担者：H19年度)

渡邊 道之 (Watanabe, Michiyuki)  
新潟大学・教育学部・准教授  
研究者番号：90374181

(研究分担者：H19年度)

大江 貴司 (Ohe, Takashi)  
岡山理科大学・理学部・准教授  
研究者番号：90258210

(研究分担者：H19年度)

多久和 英樹 (Takuwa, Hideki)  
同志社大学・理工学部・准教授  
研究者番号：80403111

(研究分担者：H19年度)