

機関番号：14401

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19340030

研究課題名 (和文) 双曲型方程式から見た発展方程式の研究

研究課題名 (英文) On study of evolution equations with hyperbolic properties

研究代表者

林 仲夫 (HAYASHI NAKAO)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30173016

研究成果の概要 (和文) : 非線形 Schrödinger 方程式, 非線形 Klein-Gordon 方程式及びこれらの方程式系について研究を行い, 解の時間減衰評価, 漸近的振舞を示した. またこれらの結果を波動作用素, 修正波動作用素の存在を示すために応用した. また臨界べき非線形項を持った方程式の場合, 解の主要項が非線形項を通してどのように表現されるかを明確にした.

研究成果の概要 (英文) : We studied nonlinear Schrödinger equations, nonlinear Klein-Gordon equations and their systems. Time decay and asymptotic behavior of solutions were shown. We applied these results to show existence of wave or modified wave operators. In the case of critical nonlinearities, it was shown that main terms of solutions can be represented through nonlinearities clearly.

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2008年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2009年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2010年度	2,400,000	720,000	3,120,000
年度			
総計	10,000,000	3,000,000	13,000,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式

## 1. 研究開始当初の背景

解の存在と一意性: Contantin-Saut, Vega, Sjölin によって独立に証明された分散型方程式の解の平滑化効果はその後 1991 年 Kenig-Ponce-Vega により精密化され未解決問題であった Korteweg-de Vries (KdV) 方程式の弱解の一意性証明をもたらした. さらに彼らの方法と Bourgain により発見されたフーリエ制限法によりデルタ関数を含む初期値に対する解の一意性が示された. 彼らの方法は非線形 Schrödinger 方程式にも利用され現在も高岡, Tao, Keel らの研究者によって発展している. しかし彼らの方法

は非線形項の構造が複雑であるものに対しては有効に利用されていない.

時間大域解の存在と解の漸近的振る舞い: 解の漸近的振る舞いを調べることは自然現象を理解する上で重要な問題であり, 藤田 (非線形放物型方程式), Strauss (非線形波動方程式), Ginibre-Velo (非線形 Schrödinger 方程式), John (非線形波動方程式) に始まり現在も研究代表者 林 (非線形放物型方程式, KdV 方程式, 非線形 Schrödinger 方程式, 非線形消散型波動方程式), 久保, 星賀, 片山, 太田 (非線形波動方程式), Ginibre-Velo (波動 -

Schrödinger 方程式), 砂川, 堤, Georgiev (非線形 Klein-Gordon 方程式), 下村, 利根川(非線形 Schrödinger 方程式), 瀬方(非線形 4 階 Schrödinger 方程式)等多くの研究が行われている。

## 2. 研究の目的

線形方程式の研究を発展させ, 複雑な非線形項をもった分散型方程式の解の存在と一意性及び KdV 方程式の半空間における解の平滑化と解の漸近解析への応用を研究する. 臨界冪または臨界冪以下の非線形項を持つ非線形 Schrödinger 方程式, 非線形 Klein-Gordon 方程式, および非線形消散型波動方程式の解の漸近的振る舞い及び波動作用素, 散乱作用素の存在, 非存在の研究を行う. 特に臨界べき非線形問題において非線形項が解の振舞いにどのように影響を与えているかを調べる. またこれら単独方程式の結果を非線形 Klein-Gordon 方程式系, その非相対論版と考えられる非線形 Schrödinger 方程式系の初期値問題を研究するために応用することを考える.

## 3. 研究の方法

双曲型方程式, 放物型方程式, 分散型方程式の専門家内の意見交換を通し境界領域の研究を組織的におこなう. その結果を各方程式に応用しさらに個々の分野の発展を促進させる. 研究代表者の研究論文のなかには多くの共同研究があり共同研究を継続するため定期的に意見交換を行う. また多くの海外共同研究者らとの共同研究を継続するために海外交流を定期的に行う. 得られた研究成果を研究会, 学会で発表し, 論文を国際誌に公表する. また内外に研究成果を公表するための研究集会を開催する.

## 4. 研究成果

(1) 臨界べき以上の非線形項を持った非線形 Klein-Gordon 方程式の解の漸近的振る舞いを調べ散乱作用素の存在を明らかにした. 証明方法は新しいもので当該分野において意義あるものと考えられる. 散乱問題において重要なことの 1 つは解の時間減衰評価であるが, 従来利用されてきた時間減衰評価 Klainerman, Georgiev らによる方程式固有の作用素を用いたものである. 一方我々の方法の特徴は方程式を時間に関して 1 階の方程式系に変換し, 各々の発展群に対して得られている時間減衰評価とソボレフの不等式を用いることによって新しい時間減衰評価を示した点にある. 重要な点は新しい評価に現れる擬微分作用素と方程式固

有の作用素の関係を明らかにした点である. この評価によって従来に比べて広いクラスで問題を考えることが可能となり未解決であった散乱問題が解決された. 次元消散型非線形 Schrödinger 型方程式の最終値問題を考え修正波動作用素の存在を非線形項が臨界冪以下のときに示した. 臨界べき以下であるので解の振る舞いは非線形項に影響される. そこで新しい形の近似解を導入し, この近似解の近傍で解を見つけることが問題を解く鍵である. 新しい形の近似解を見つけるために Schrödinger 型方程式の線形解の第 1 次近似解を利用した. また近似解の誤差評価が解を見つけるために重要となるので精密な誤差評価を証明において求めた.

(2) 1 次元 3 次の非線形項を持った非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題に対して, 解の漸近的振る舞いについて研究を行った. 最終値問題に関しては多くの結果が示されている. しかし初期値問題に対しては, 微分項を含む非線形項についての結果以外は満足すべき結果がない. ここでは初期値が奇関数の場合に解の漸近形を明らかにした. 初期値が奇関数のとき解の時間減衰がよくなることが熱方程式では知られているが, Schrödinger 方程式ではそのようなことが起きないことに注意しておく. ここでは Shatah による標準形変換の方法を用いるとき現れる特異性を消すために奇関数条件を利用した.

(3) 臨界べき非線形 Klein-Gordon 方程式の初期値問題を考察し解の漸近的振る舞いを明らかにした. 標準形変換法の改善, 非線形項の分解と時間減衰評価を用いることにより, 広いクラスの初期値に対して散乱問題を考えることができた. 散乱問題においては散乱作用素の存在を示したことが重要な成果としてあげられる. また 2 次元 2 次の非線形 Klein-Gordon 方程式に標準形変換を用いる際に現れる双線形作用素の評価において, 角度微分の評価を有効に用いたことは独創的な考え方である. 非線形 Klein-Gordon 方程式系の非相対論版と考えられる非線形 Schrödinger 方程式系の初期値問題を研究し, 解の相互作用が共鳴現象を起こす場合に解の時間減衰評価を示した. また解を線形方程式の解の近傍で求めることができないことを示した. 初期値問題に関しては, 解の相互作用が共鳴現象を起こさない場合, 解の漸近的振る舞いは未解決問題である. 解の漸近的振る舞いの問題に対して, 単独方程式の研究で用いられた方法を参考に, 最終値問題を考えることによって解の漸近形を含めた解の存在を示すことに

成功した。ただし、解の漸近形が方程式系に付随した常微分方程式系により支配されているので十分な結果とは言えない。臨界べき非線形項を持った非線形 Schrödinger 方程式の解の振舞いを、近似解を修正することにより従来の成果より広いクラスの最終値に対して示すことができた。またこの結果を方程式系に応用することに成功した。以上得られた研究成果を研究会、学会で発表し、論文を国際誌に公表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 26 件)

- ① N. Hayashi, C. Li and P.I.Naumkin, Small data scattering for a system of nonlinear Schrödinger equations, *Differential Equations and Applications*, **3** (2011), no.3, pp. 415-426, 査読有
- ② N. Hayashi and P.I.Naumkin, Global existence for the cubic nonlinear Schredinger equation in lower order Sobolev spaces, *Differential Integral Equations*, **24** (2011), pp. 801-828, 査読有
- ③ N. Hayashi, C. Li and P.I.Naumkin, On a system of nonlinear Schrödinger equations in 2d, *Differential Integral Equations*, **24** (2011), pp. 417-434, 査読有
- ④ N. Hayashi, M. Ikeda and P. I. Naumkin, Wave operator for the system of the Dirac-Klein-Gordon equations, *Math. Methods Appl. Sciences*, **34** (2011), no. 8, pp. 896-910, 査読有
- ⑤ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Asymptotics for nonlinear heat equations, *Nonlinear analysis*, **74** (2011), no. 5, pp. 1585-1595, 査読有
- ⑥ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Subcritical quadratic nonlinear Schrödinger equation, *Communications in Contemporary Mathematics*, **13** (2011), pp. 969-1007, 査読有
- ⑦ N. Hayashi, K. Tomoeda and T. Yanagisawa, Analyticity for higher order nonlinear dispersive equations, *GAKUTO, International Series, Mathematical Sciences and Applications, Current Advances in Nonlinear Analysis and Related Topics*, **32** (2010), pp. 111-130, 査読有
- ⑧ N. Hayashi and P. I. Naumkin, The initial value problem for the quadratic nonlinear Klein-Gordon equation, *Advances in Mathematical Physics*, (2010), Article ID 504324, 査読有
- ⑨ N. Hayashi and E. Kaikina, Benjamin-Ono equation on a half-line, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, (2010), Article ID 714534, 査読有
- ⑩ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Wave operators to a quadratic nonlinear Klein-Gordon equation in two space dimensions, *Nonlinear Analysis*, **71** (2009), no. 9, pp. 3826-3833, 査読有
- ⑪ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Asymptotics of odd solutions of quadratic nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **359** (2009), no.1, pp. 146-158, 査読有
- ⑫ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Asymptotics of odd solutions for cubic nonlinear Schrödinger equations, *J. Differential Equations*, **246** (2009), no. 4, pp. 1703-1722, 査読有
- ⑬ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Scattering Operator for Nonlinear Klein-Gordon Equations, *Communications in Contemporary Mathematics*, **11** (2009), no.5, pp. 771-178, 査読有
- ⑭ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Final state problem for the cubic nonlinear Klein-Gordon equation, *J. Math. Phys.*, **50** (2009), no. 10, 103511, 査読有
- ⑮ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Nonlinear scattering for a system of one dimensional nonlinear Klein-Gordon equations, *Hokkaido Math. J.*, **37** (2008), pp. 647-667, 査読有
- ⑯ N. Hayashi, P. I. Naumkin and Ratno Bagus Edy Wibowo, Nonlinear scattering for a system of nonlinear Klein-Gordon equations, *J. Math. Phys.*, **49** (2008), no.10, 103501, 査読有
- ⑰ N. Hayashi, P. I. Naumkin and H. Sunagawa, On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type, *SIAM J. Math. Anal.*, **40** (2008), pp. 278-291, 査読有
- ⑱ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Modified wave operators for nonlinear

Schrödinger equations with subcritical dissipative nonlinearities, Inverse Problems and Imaging, 1(2008), no. 2, pp. 391-398, 査読有

- ⑱ N. Hayashi and P. I. Naumkin, The initial value problem and asymptotics of solutions for the cubic nonlinear Klein-Gordon equation, Zeitschrift für Angewandte Math. und Physik, **59** (2008), no. 6, pp.1002-1028, 査読有
- ⑳ N. Hayashi and P. I. Naumkin, Scattering operator for the nonlinear Klein-Gordon equations in higher space dimensions, J. Differential Equations, **244** (2008), pp.188-199, 査読有

[学会発表] (計 30 件)

- ① 林 仲夫 Quadratic nonlinear Klein-Gordon equation in 2d, 日本数学会年会, 平成 24 年 3 月 29 日, 東京理科大学
- ② 林 仲夫, Quadratic nonlinear Klein-Gordon equations in 1D, The 8th East Asia PDE Conference, 平成 23 年 12 月 21 日, Posco International Center, Postech, Pohang (韓国)
- ③ 林 仲夫, Bilinear estimates and Nonlinear Klein-Gordon equations, The 4th MSJ-SI Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute, 平成 23 年 9 月 19 日, 九州大学
- ④ 林 仲夫, 双線形作用素の評価と非線形 Klein-Gordon 方程式への応用, 大阪市大・大阪府大合同「第 2 回南大阪応用数学セミナー」, 平成 23 年 7 月 2 日, 大阪市立大
- ⑤ 林 仲夫, A bilinear estimate and its application to a quadratic nonlinear Klein-Gordon equation in two space dimensions, 阪大微分方程式セミナー, 平成 23 年 5 月 27 日, 大阪大学
- ⑥ 林 仲夫, Nonexistence of scattering states for nonlinear dispersive equations, 「偏微分方程式と数理物理学」, 平成 22 年 11 月 17 日, 京都芝蘭会館
- ⑦ 林 仲夫, Modified wave operator for a system of nonlinear Schrödinger equations, 「早稲田大学 非線形偏微分方程式研究所」設立研究集会, 平成 22 年 11 月 10 日, 早稲田大学

- ⑧ 林 仲夫, Modified wave operator for a system of NLS equations in 2D, Joint workshop on PDE at Jinhua, 平成 22 年 9 月 27 日, Zhejiang Normal University (中国)
- ⑨ 李 春花, 林 仲夫, Schrödinger 方程式系の解の時間減衰評価, 2010 日本数学会秋季総合分科会, 平成 22 年 9 月 24 日, 名古屋大学
- ⑩ 林 仲夫, Time decay of solutions to a system of nonlinear Schrödinger equations, 「第六回 非線形の諸問題」, 平成 22 年 9 月 17 日, 山口大学
- ⑪ 林 仲夫, Asymptotic behavior of solutions to nonlinear Schrödinger equations, The 35th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 平成 22 年 8 月 24 日, 北海道大学
- ⑫ 林 仲夫, On a system of nonlinear Schrödinger equations in 2d, 応用解析研究会, 平成 22 年 5 月 15 日, 早稲田大学
- ⑬ 林 仲夫, Dirac-Klein-Gordon 方程式の散乱問題について, 熊本大学応用解析セミナー, 平成 22 年 1 月 30 日, 熊本大学
- ⑭ 林 仲夫, 非線形 Schrödinger 型方程式, 奈良女子大学数学談話会, 平成 21 年 11 月 30 日, 奈良女子大学
- ⑮ 林 仲夫, 非線形分散型方程式の漸近解析, 九州非線形偏微分方程式・九州冬の学校, 平成 21 年 11 月 6 日-7 日, 福岡大学
- ⑯ 林 仲夫, P. Naumkin, 利根川 聡, 空間 2 次元における 2 次の非線形 Klein-Gordon 方程式に対する波動作用素について, 日本数学会秋季大会, 平成 21 年 9 月 27 日, 大阪大学
- ⑰ 池田 正弘, 林 仲夫, Dirac-Klein-Gordon 方程式系の波動作用素, 日本数学会秋季大会, 平成 21 年 9 月 27 日, 大阪大学
- ⑱ 林 仲夫, 非線形 Klein-Gordon 方程式の散乱問題, 日本数学会, 解析学賞受賞特別講演, 平成 21 年 3 月 28 日, 東京大学
- ⑲ B. E. W. Ratno, 林 仲夫, Dirac-Klein-Gordon 方程式系の散乱問題, 日本数学会秋季大会, 平成 20 年 9 月 24 日, 東京工業大学
- ⑳ 林 仲夫, 非線形 Klein-Gordon 方程式系の散乱問題, Paris-Sud PDE セミナー, 平成 20 年 3 月 11 日, パリ南大学 (フランス)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

林 仲夫 (HAYASHI NAKAO)

大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：30173016

(2) 研究分担者

西谷 達雄 (NISHITANI TATSUO)

大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：80127117

(H19 まで分担者として参画)

土居 伸一 (DOI SHINICHI)

大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：00243006

(H19 まで分担者として参画)

久保 英夫 (KUBO HIDEO)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：50283346

(H19 まで分担者として参画)