

平成 22年 5月 6日現在

研究種目：基盤研究 (B)  
 研究期間：2007～2009  
 課題番号：19340038  
 研究課題名 (和文) 曲線のモジュライ空間に関する力学系と確率過程のエルゴード理論的研究  
 研究課題名 (英文) Ergodic-theoretical study of dynamical systems and stochastic processes on moduli space of curves  
 研究代表者  
 盛田 健彦 (MORITA TAKEHIKO)  
 大阪大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号：00192782

## 研究成果の概要 (和文)：

初年度は、繰り込まれた RVZ 誘導変換に対して、代表者の先行研究で既に得られていた局所型中心極限定理を、応用上重要な関数を含むクラスに拡張した。2008 年度以降に予定していたタイヒミュラー計量に付随した自然な拡散過程の構成については、当初予測していなかった難点にぶつかったが、幸いにしてディリクレ空間の方法によりタイヒミュラー空間のブラウン運動と思しき拡散過程の候補に至ることができた。

## 研究成果の概要 (英文)：

In 2007, we extended a local central limit theorem for renormalized Rauzy-Veech-Zorich inductions to a wider class of functions than the class in our previous result. From 2008, we started constructing canonical diffusion processes on the Teichmüller spaces with Teichmüller metric. In spite of an unexpected difficulty, we fortunately meet a candidate of the "Teichmüller Brownian motion" via Dirichlet space theory.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	3,700,000	1,110,000	4,810,000
2008年度	3,300,000	990,000	4,290,000
2009年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
年度			
年度			
総計	10,500,000	3,150,000	13,650,000

研究分野：エルゴード理論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：区間入れ換え変換、タイヒミュラー空間、中心極限定理、力学系ゼータ関数、熱力学形式、ブラウン運動

## 1. 研究開始当初の背景

複素上半平面  $\mathbf{H}$ 、モジュラー群  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ 、モジュラー曲面  $M(1)=\mathbf{H}/\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$  は、それぞれ、トーラス=種数 1 のコンパクトリー

マン面のタイヒミュラー空間、写像類群、モジュライ空間とみなすことができ、この同一視による上半平面のタイヒミュラー計量はポアンカレ計量に他ならないということが

よく知られている。本研究代表者は、かねてより

- ・複素上半平面 → 種数  $g$  ( $\geq 2$ ) のコンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間
- ・モジュラー群 → 種数  $g$  ( $\geq 2$ ) の閉曲面の写像類群
- ・モジュラー曲面 → 種数  $g$  ( $\geq 2$ ) のコンパクトリーマン面のモジュライ空間

という置き換えを行うことによって、モジュラー曲面に関する既存の結果がどうなるかということを確認し、種数 1 の場合と種数 2 以上の場合を対応付ける辞書を完成させることを長期的な目標として提案した。以上は本研究をその一部とする長期的な目標であるが、その実現可能性を示唆する結果として、1970年代後半の W. Thurston による写像類群の分類と、1980年代の中ごろの H. Masur や W. Veech 等によるタイヒミュラー測地流の研究がある。本研究代表者は1986年ごろにこれらの結果を目にしたとき、目標とする辞書が断片的には存在することを知り、辞書完成の可能性を考えるに至った。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、種数が 2 以上のリーマン面(代数曲線)の複素構造全体の空間(モジュライ空間)とその普遍被覆に相当するタイヒミュラー空間の幾何学的、解析的構造とそれらに付随する力学系と確率過程の定性的性質とくにエルゴード理論的な大域的挙動との関係を明らかにし、モジュライ空間における力学系や確率過程を用いた大域解析的アプローチの一例を示すことによって、同様の手法による一般のモジュライ空間研究への道を開くことであり、以下にあげる具体的な目標を設定した。

(1) モジュライ空間のタイヒミュラー測地流とRVZ誘導変換に対する熱力学形式の応用として既に得られている結果の整理を行い、タイヒミュラー測地流のどのようなエルゴード理論的性質が、曲線のモジュライ空間のセルバーグゼータ関数のどのような解析的性質と対応しているかを吟味し、対応表を作成する。

(2) 曲線のモジュライ空間で構成可能な拡散過程の中で、どのようなものが上記の辞書の中で熱核と対応するブラウン運動に当たるものなのか特定し、種数 1 の場合のような、測地流の大域的挙動、とくにエルゴード理論的性質との関係を見る。

## 3. 研究の方法

本研究課題を含む長期的構想の基本方針に沿って、種数 1 の場合を雛形とした研究を

遂行する。具体的には、「Weyl 変換がトーラスの正則 1 形式を定め、それによって自然に導入されるトーラス上の測度付き葉層構造と上半平面の境界である実軸上の点との間にも自然な対応がある。実軸上の点を表現するアルゴリズムの一つが連分数変換(モジュラー群との関係に注目して正確にいうと、その 2 回合成)である」。モジュラー曲面の測地流は連分数変換を底変換として懸垂流として表現することができる。したがって、両者のエルゴード理論的性質が対応付けられることによって、連分数変換のエルゴード理論的性質とモジュラー曲面上の測地流の周期軌道分布の情報が関係付けられ、結果としてセルバーグゼータ関数の解析的性質にも繋がる」という種数 1 の既存の結果に着目する。そこで、モジュラー曲面上の測地流を、区間入れ換え変換の定めるアーベル微分のモジュライ空間に制限したタイヒミュラー測地流に置き換え、連分数変換を RVZ 誘導変換に置き換えて、類似する現象を検証していく。手順としては以下のような。

(1) 2007 年度は研究目的の中であげた最初の項目 (1) に重点をおいて研究を進める。本研究の着想に研究代表者がどのようにして至ったかを、研究組織構成員全員に周知し本研究の背景についてある程度の知識を共有するため、必要に応じて他研究機関の研究者を招いて勉強会やセミナーを行う。

(2) タイヒミュラー測地流をアーベル微分のモジュライ空間の連結成分に制限したときの力学系ゼータ関数の解析的性質とそのエルゴード理論的性質の関係について、種数 1 の場合との類似を検証する。周期軌道分布の素数定理型定理の成立を示すことがその作業の中で重要な意味を持つ。

(3) (1)、(2) で述べた作業をすべて初年度に終わらせることは、実際のところかなり難しいと思われる。ただし、上記の方法は、タイヒミュラー測地流のエルゴード理論的性質とセルバーグゼータ関数の解析的性質を素数定理型定理の成立の視点から解析することを強調したものであって、それらの部分的な結果からある程度の対応表は作成できるものと考えている。必要に応じて 2008 年度以降も、研究の目的 (2) で掲げた課題と平行して研究を続行する。

(4) 2008 年度以降は 2007 年度の研究を受けて研究目的の項目 (2) の課題「曲線のモジュライで構成可能な拡散過程の中で、どのようなものが、上記の辞書の中で熱核と対応するブラウン運動に当たるものなのか特定し、種数 1 の場合のような、測地流の大域的挙動(、

とくに「エルゴード理論的性質との関係を見る」の研究に入る。

(5) タイヒミュラー計量に付随するブラウン運動を構成し、その大域的性質：保存性、過渡性等を調べ、ブラウン運動と呼ぶに相応しいか否かの検証を行う。ただし、タイヒミュラー計量はリーマン計量ではないので、対応するブラウン運動の存在自体もそれほど自明ではない。そのため構成にあたっては、確率解析における様々な切り口を試みる必要がある。一方で、ヴェイユ・ピーターソン計量は実解析的ケーラー計量であり、一般論によって自然に対応するブラウン運動が定まる。これら2つの拡散過程に対してどちらがタイヒミュラー空間上のブラウン運動と呼ぶべきものなのかを判定するために、これらの拡散過程とタイヒミュラー測地流のエルゴード理論的性質の関連性を検証する作業を行う。

#### 4. 研究成果

(1) 2007年度は、当初の計画に沿って研究代表者・分担者が、広島大学で開催している確率論・力学系セミナー、数理解析セミナー、複素解析セミナーへ、必要に応じて他研究機関の研究者を招いて、本研究と関する最近の研究結果や研究手法について研究連絡・討論を行った。また、本研究と関連する広範な分野からの講演者を招いて、2007年11月9日、10日に広島大学において研究集会「力学系と微分方程式」を開催した(講演アブストラクト等の詳細情報については関連ホームページ有り、本成果報告5. 種な発表論文等〔その他〕を参照)。これらの研究・交流活動の中で、優先して取り組むべき興味深い研究対象が次々現れたため、「対応表」には予想したものより多くの項目を取り込み、さらに充実させる必要が生じ、その拡大版を作成すべきであるという判断から、ある程度最終版と思われるレベルまでは作成は先送りとした。ただし、当初計画した具体的な研究については、ほぼ満足すべき成果を得た。とくに、繰り込まれたRVZ誘導変換に対しては、既に得ていた局所型中心極限定理を、タイヒミュラー測地流の懸垂流表現で現れる天井関数等の特別な関数を含むクラスに拡張して証明することができた。その応用の一部については、2007年8月6日-8月10日、名古屋大学で開催された国際研究集会「Spectral Analysis in Geometry and Number Theory」の招待講演(題目:Renormalized Rauzy-Veech-Zorich induction)で発表した。

(2) 2008年度は曲線のモジュライ空間で構成可能な拡散過程の中で、どのようなものがモジュライ空間のブラウン運動にあたるものなのかを特定するための準備として、タイ

ヒミュラー測地流のエルゴード理論的挙動に注目した研究を行った。中でも、2007年度に行った繰り込まれたRauzy-Veech-Zorich誘導変換(以下R-RVZ誘導変換という)の周期軌道分布に関する長さスペクトルの分布の非格子性の証明の改良の作業にかなりの時間をかけた。R-RVZ誘導変換の合成を記述する正行列の適当な組み合わせに古典的なPerron-Frobeniusの定理を適宜使用することによって、格子分布性を仮定すると矛盾が生ずるという初等的な証明が完成した。この結果はContemp. Math.に掲載されている論文Renormalized Rauzy-Veech-Zorich inductionsの中で発表した。その形式的な応用としては素数定理の類似をさらに一般化したChebotarev型の定理を証明することができることが判明した。これを含め現在までに得られているこの方面の成果については、2008年7月に京都大学数理解析研究所で開催された研究集会「L関数の値分布と関係する数論的な諸簡数の研究」において報告した。

(3) 2007年度の研究については更なる発展が期待されるため継続して研究を推進することにしたが、2008年度より重点を置いていた「タイヒミュラー計量に付随する自然な拡散過程の構成」の段階については当初予想していなかった難点が見つかり、確率微分方程式による方法は一旦回避し生成作用素による特徴付けおよびディリクレ形式の方法の2通りの方法で議論することとなった。そのため当初計画よりスケジュールが遅れた。しかし、2009年度には構成問題についてはある程度満足すべき結果に至ることができた。具体的には、タイヒミュラー計量に滑らかさがあったと仮定して形式的な計算を実行することにより、「ほとんどいたるところ」連続な係数をもつ拡散生成作用素をタイヒミュラー計量を用いて具体的に求めた。さらにこの作用素がBusemann-Hausdorff測度に関して発散形をしていることを導き、ディリクレ形式の理論が適用可能であることも確認した。一方、以上の方法とは別にSturmが距離付き測度空間で行った飛躍過程のディリクレ形式の $\Gamma$ 極限として拡散過程のディリクレ形式を導出する方法により、タイヒミュラー距離から保存的かつ過渡的な拡散過程を構成した。これらの結果については更に詳細を精査したのち研究論文とする予定である。この他、上記の研究の技術的な副産物として、既に公表済みの記号力学系の特異摂動に関する論文の補足的な結果を得て、2009年8月31日-9月3日北海道大学で開催された研究集会「Dynamics of complex systems (DCS) 2009」における招待講演で報告した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 39 件)

- ① Morita, T, Renormalized Rauzy-Veech-Zorich inductions. Contemp. Math. 査読有り 484 (2009), 135--151
- ② Hain, R; Matsumoto, M, Relative pro-l completions of mapping class groups. J. Algebra 査読有り 321 (2009), no. 11, 3335--3374
- ③ Iwata, K; Kolsrud, T, Central limit theorem for constrained Poisson systems. Bull. Sci. Math. 査読有り 133 (2009), no. 6, 658--669
- ④ Ikehata, M; Kawashita, M, The enclosure method for the heat equation. Inverse Problems 査読有り 25 (2009), no. 7, 1--10
- ⑤ Anderson, G. D.; Sugawa, T; Vamanamurthy, M. K.; Vuorinen, M, Hypergeometric functions and hyperbolic metric. Comput. Methods Funct. Theory 査読有り 9 (2009), no. 1, 269--284
- ⑥ Kraaikamp, C; Nakada, H; Schmidt, T. A. Metric and arithmetic properties of mediant-Rosen maps. Acta Arith. 査読有り 137 (2009), no. 4, 295--324
- ⑦ Isozaki, Y, Fluctuation identities applied to the hitting time of a half-line in the plane. J. Theoret. Probab. 査読有り 22 (2009), no. 1, 57--81
- ⑧ Morita, T; Tanaka, H, Singular perturbation of symbolic dynamics via thermodynamic formalism. Ergodic Theory Dynam. Systems 査読有り 28 (2008), no. 4, 1261--1289
- ⑨ Yoshino, M, Analytic non-integrable Hamiltonian systems and irregular singularity. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 査読有り 187 (2008), no. 4, 555--562
- ⑩ Hagita, M; Matsumoto, M; Natsu, F; Ohtsuka, Y, Error correcting sequence and projective de Bruijn graph. Graphs Combin. 査読有り 24 (2008), no. 3, 185--194
- ⑪ Sugawa, T, The limiting shape of one-dimensional Teichmüller spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 査読有り 136 (2008), no. 8, 2849--2858
- ⑫ Berthé, V.; Nakada, H; Natsui, R, Asymptotic behavior of the number of solutions for non-Archimedean Diophantine approximations with restricted denominators. Finite Fields Appl.

査読有り 14 (2008), no. 4, 849--866

- ⑬ Nakada, H; Natsui, R, The non-monotonicity of the entropy of  $\alpha$ -continued fraction transformations. Nonlinearity 査読有り 21 (2008), no. 6, 1207--1225
- ⑭ Morita, T, Renormalized Rauzy inductions. Adv. Stud. Pure Math. 査読有り 49 (2007), 263--288
- ⑮ Morita, T, Meromorphic extensions of a class of zeta functions for two-dimensional billiards without eclipse. Tohoku Math. J. (2) 査読有り 59 (2007), no. 2, 167--202
- ⑯ Yoshino, M, Convergent and divergent solutions of singular partial differential equations with resonance or small denominators. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 査読有り 43 (2007), no. 4, 923--943
- ⑰ Haramoto, H; Matsumoto, M; Nishimura, T, Computing conditional probabilities for  $F_2$ -linear pseudorandom bit generators by splitting MacWilliams identity. Int. J. Pure Appl. Math. 査読有り 38 (2007), no. 1, 29--42
- ⑱ Kim, S-A; Sugawa, T, Invariant differential operators associated with a conformal metric. Michigan Math. J. 査読有り 55 (2007), no. 2, 459--479
- ⑲ Aaronson, J; Nakada, H, Exchangeable Gibbs and equilibrium measures for Markov subshifts. Ergodic Theory Dynam. Systems 査読有り 27 (2007), no. 2, 321--339

[学会発表] (計 5 件)

- ① 盛田 健彦、記号力学系の特異摂動とその応用、Dynamics of complex systems 2009、2009年8月31日、北海道大学
- ② 盛田 健彦、連分数変換の一般化とその力学系ゼータ関数、L 関数の値分布と関係する数論的な諸関数の研究、2008年7月3日、京都大学数理解析研究所
- ③ 盛田 健彦、Renormalized Rauzy-Veech-Zorich inductions、Spectral Analysis in Geometry and Number Theory、2007年8月9日、名古屋大学野依ホール

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/cha/Rikigakukei2007.html>

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

盛田 健彦 (MORITA TAKEHIKO)

大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：00192782

(2) 研究分担者

杉田 洋 (SUGITA HIROSHI)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：50192125

磯崎 泰樹 (ISOZAKI YASUKI)  
大阪大学・大学院理学研究科・講師  
研究者番号：90273573

吉野 正史 (YOSHINO MASAFUMI)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：00145658

(H21→H21：連携研究者)

松本 眞 (MATSUMOTO MAKOTO)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：70231602

(H21→H21：連携研究者)

岩田 耕一郎 (IWATA KOICHIRO)  
広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：20241092

(H21→H21：連携研究者)

川下 美潮 (KAWASHITA MISHIO)  
広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：80214633

(H21→H21：連携研究者)

滝本 和広 (TAKIMOTO KAZUHIRO)  
広島大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号：00363044

(H21→H21：連携研究者)

須川 敏幸 (SUGAWA TOSHIYUKI)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号：30235858

(H20→H21：連携研究者)

(3) 連携研究者

仲田 均 (NAKADA HITOSHI)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号：40118980