様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年４月２０日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究（Ｂ）
研究期間：2007～2010
課題番号：１９３４００４０
研究課題名（和文）　複素力学系と作用素環の研究

研究課題名（英文）　Study on Complex dynamical systems and operator algebras

研究代表者
綿谷　安男（WATATANI YASUO）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：００１７５０７７

研究成果の概要(和文):この研究では有理関数や超越整関数などの複素平面上の有理型関数の反復合成による複素力学系から、ヒルベルト空間上の作用素からなる C*-環を構成した。複素力学系と作用素環との二つの異なった分野の間の思いもかけない結びつきを発見した。ジュリア集合の持つ自己相似性は生成したC*-環の純無限な単純性に対応した。複素力学系の分岐の様子が生成したC*-環上のゲージ作用のある種の平衡状態である KMS 状態に反映し、元の有理関数の次数や分岐点の個数や例外点の個数などの情報も復元できることを解明した。

研究成果の概要(英文):In the research we constructed C*-algebras of operators on Hilbert spaces for complex dynamical systems on a complex plane by the iteration of meromorphic functions like rational functions and transcendental entire functions. We found unexpected relations between complex dynamical systems and operator algebras. Self-similarity of Julia sets of complex dynamical systems corresponds to purely infinite simplicity of the associated C*-algebras. The branch structure of complex dynamical systems is related with the structure of KMS states (equilibrium states) for the gauge actions on the associated C*-algebras. We showed that we can recover the degree of the rational function, the number of branched points and the number of exceptional points.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2008年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2009年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2010年度	2,200,000	660,000	2,860,000
総　計	8,500,000	2,550,000	11,050,000

研究分野:数物系科学
科研費の分科・細目:数学・大域解析学
キーワード:作用素環、複素力学系

1. 研究開始当初の背景

位相力学系から作用素環を作る方法は接合積という手法が古くから知られていた。しかし有理関数の作る複素力学系の場合は位相同型ではないので、接合積では構成できない。亜群を使う方法もあるが、有理関数の場合は分岐点という特異点が存在するため、それも困難であった。しかしながら、クライン群と有理関数との類似を記述するサリヴァンの辞書がよい研究の指針になっていることを考えると、なんとか有理関数

の場合もよい C*-環を導入して研究すべきと模索していいた。

2. 研究の目的

この研究では有理関数や超越整関数などの複素平面上の有理型関数 R の反復合成$(R^n)_n$による複素力学系から、ヒルベルト空間上の作用素からなる C*-環を構成する。この研究の目的は複素力学系と作用素環という二つの異なった分野の思いもかけない結びつきを解明することである。

3. 研究の方法

(1)2次以上の有理関数は位相同型写像ではないので、接合積でもって作用素環を構成することができない。そこでこれをリーマン球面上の有限被覆写像なので、分岐指数を使ってそのグラフ上の連続関数全体は係数環上の双加群になる。この双加群から Cuntz Pimsner 構成を使って C*-環を対応させる。リーマン球面全体と Julia 集合と Fatou 集合のそれぞれ上で考えることで、3つの C*-環を構成する。

(2)分岐点のような特異点の構造と付随する C*-環との関連を研究する。その C*-環上の K 理論や KMS 状態(平衡状態)の言葉で、元の特異点の構造を記述することを目指す。

4. 研究成果

(1)複素平面上の有理関数 R の反復合成$(R^n)_n$による複素力学系から、C*-環を構成できた。不安定な領域である Julia 集合上に制限して作った C*-環は真無限な単純 C*-環になった。これは Julia 集合の自己相似性を反映して、作用素環も自己相似性を持つことを示しており興味深い。

(2)$R(z) = z^n$ や $R(z) = z^2-2$ のような典型的な例についてはその C*-環の K 群を計算できた。しかし、ゲージ作用の不動点環の K 群の計算はまだ求められていない。

(3)ゲージ作用に対する KMS 状態の完全分類に成功した。その系として特異点の構造を作用素環の言葉で表すことが可能になった。有理関数 R の次数を deg R とおくと、逆温度 β =log deg R で状態遷移がおこっている。それにより、有理関数 R の次数だけでなく、分岐点の個数、例外点の個数、例外点の軌道という情報を KMS 状態の情報から復元することができた。もう少し詳しく述べよう。有理関数 R の例外点が{a,b}からなり R(a) = b、R(b) = a となっている場合は分岐点も{a,b}からなる。この時、逆温度 β の KMS 状態の端点は次のように完全分類できた。

(ア) $\beta=0$ の時は、KMS 状態の端点は 1 個でトレースになる。
(イ) $0<\beta<\log \deg R$ の時は、KMS 状態の端点は2個で、例外点 a と b のディラック測度に対応している。
(ウ) $\beta=\log \deg R$ の時は、KMS 状態の端点は3個で例外点 a と b のディラック測度と Lyubich 測度に対応している。
(エ) $\beta>\log \deg R$ の時は、KMS 状態の端点は分岐点に対応しており、この場合は a と b のディラック測度に対応して2個になる。

有理関数 R の例外点が1個や0個の場合も類似の完全分類が可能である。そして $\beta>\log \deg R$ の時は、KMS 状態の端点は分岐点に対応している。$0<\beta<\log \deg R$ の時は KMS 状態の端点は例外点に対応している。

(4)ゲージ作用に対する KMS 状態の完全分類は、自己相似集合に付随する C*-環の場合にも同様な結果を得ることができた。

(5)有理関数の代わりに、2変数多項式 P(x,y) = 0 で表される代数的対応に対して C*-環を構成した。真無限な単純 C*-環になる十分条件やいくつかの具体例で K 群を計算した。

(5)テント写像のような反復関数系のつくる自己相似集合に付随した C*-環に対しても複素力学系で得たと類似の定理を得ることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 26 件)

① N. Nawata and Y. Watatani, 査読あり, Fundamental group of simple C*-algebras with unique trace II, J. Func. Anal. 260 (2011), 428-435
② T. Kajiwara and Y. Watatani, 査読あり, C*-algebras associated with algebraic correspondneces on the Riemann sphere, J. Operator Theory 65 (2011), 427-449
③ N. Nawata and Y. Watatani, 査読あり, Fundamental group of simple C*-algebras with unique trace, Advances in Math. 225 (2010), 307-318
④ H. Hamada and Y.Watatani, 査読あり, Toeplitz-composition C*-algebras for certain finite Blaschke products, Amer. Math. Soc. 138 (2010), 2113-2123.
⑤T. Harada and H. Kosaki, 査読あり, Trace Jensen inequality and related weak majorization in semi-finite von Neumann algebras, J. Operator Theory 63 (2010), 129-150.

⑥T. Matsui, 査読あり, Spectral gap and split property in quantum spin chains, J. Math. Phys, 51 (2010)

⑦ M.Enomoto and Y.Watatani, 査読あり, Indecomposable representations of quivers on infinite dimensional Hilbert spaces, J. funct. Anal. 256 (2009), 959-991

⑧Y. Watatani, 査読あり, Complex dynamical systems and associated C*-algebras, Operator structures and dynamical systems, 291-305, Contemp. Math. 503, Amer. Math. Soc. 2009.

⑨T.Kajiwara, 査読あり, Countable bases for Hilbert C*-modules and Classification of KMS state, Operator structures and dynamical systems, , Contemp. Math. 503, Amer. Math. Soc. 2009.

⑩F. Hiai and Y. Ueda, 査読あり, A log-Sobolev type inequality for free entropy of two projections, Ann. Inst. Henri Poincare Probab. Stat.45 (2009), 239-249.

⑪F. Hiai, T. Miyamoto and Y. Ueda, 査読あり, Orbital approach to microstates free entropy, Internat. J. Math. 20 (2009), 227-273.

⑫Y. Ueda, 査読あり, On peak phenomena for non commutative H^{∞} Math. Ann. 343 (2009), 421-429.

⑬ T. Masuda and R. Tomatsu, 査読あり, Approximate innerness andCentral triviality of endomorphisms, Adv. Math. 220 (2009), 1075-1134.

⑭ M. Ionescu and Y. Watatani, 査読あり, C*-algebras associated with Mauldin-Williams graphs, Canad. Math. Bull. 51 (2008), 545-560.

⑮T. Harada and H. Kosaki, 査読あり, On equality condition for trace Jensen Inequality in semi-finite von Neumann algebras, Internat. J. Math. 19 (2008), 41-501.

⑯H. Kosaki, 査読あり, On infinite divisibility of positive definite functions arisingfrom operator means, J. Funct. Anal. 254 (2008), 84-108.

⑰ M. Keyl, T. Matsui, D. Schlingemann and R. Werner, 査読あり, On Haag duality for pure states of quantum spin chains, Rev. Math. Phys. 20 (2008),707- 724.

⑱ Y. Ueda, 査読あり, Remarks on HNN extensions in operator algebras, Illinois J. Math. 52 (2008), 705-725.

⑲ F. Hiai and Y. Ueda, 査読あり, Notes on microstate free entropyof projections, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44 (2008),49-89.

⑳T. Masuda, 査読あり, Classification of actions of duals of Finite groups on the AFD factor of type II_1, J. Operator Theory 60 (2008), 273-300.

㉑M. Izumi, T. Kajiwara and Y. Watatani, 査読あり, KMS states and branched points, Ergodic Theory Dynam. Systems 27 (2007), 1887-1918.

㉒M. Mori, O. Suzuki and Y. Watatani, 査読あり, Representations of Cuntz algebras on fractal sets, Kyushu J. Math. 61 (2007), 443-456.

㉓ M. Enomoto and Y. Watatani, 査読あり, Exotic indecomposable systems of four subspaces in a Hilbert Spaces, Integral Equations Operator Theory 59 (2007), 149-164.

㉔R. Bhatia and H. Kosaki, 査読あり, Mean matrices and infinite divisibility, Linear Algebras Appl. Linear Algebas Appl. 424 (2007), 36-54.

㉕T. Masuda, 査読あり, Evans-Kishimoto type argument for actions of discrete amenable groups on McDuff factors, Math. Scand. 101 (2007), 48-64.

㉖ T. Masuda and R. Tomatsu, 査読あり, Classification of minimal Actions of a compact Kac algebra with amenable dual, Comm. Math. Phys. 274 (2007), 487-551.

〔学会発表〕(計 9 件)

①Y. Watatani
Self-similarity and fundamental group of simple C*-algebras, KOTAC International Conference, Inchon, Korea, 2010.6.18.

②Y. Watatani,
Fundamental group of simple C*-algebras with unique trace, Conference on KMS states and non- commutative geometry, Victoria, Canada, 2009.7.

③H. Kosaki,
Norm comparison for operator means: general theory and new results, ICTP, Trieste, Italy, 2009. 7.6.

④Y. Watatani,
Composition operators and C*-algebras associated with complex dynamical systems, Asian Mathematical Conference 2009, Kuala Lumpur, Malaysia, 2009.6.24.

⑤Y. Watatani,
Complex dynamical systems and associated C*-algebras, Operator structures and dynamical systems, Leiden, Netherlands, 2008.7.21.

⑥Y. Watatani,
C*-algebras associated with algebraic correspondencs, C*-algebras associated to discrete and dynamical systems, BIRS, Bunff, Canada, 2008. 1.

⑦H. Kosaki,

Trace Jensen type Inequality in von Neumann algebras and related Topics, Operator algebras and Quantum fields theory, Vienna, Austria, 2008.

⑧Y. Watatani,
Branched points and C*-algebras associated with complex dynamica systems, KOTAC, Seoul, Korea, 2007. 6.

⑨H. Kosaki,
On Jensen-type majorizations in semi-finite von Neumann algebras,
Noncommutative L_p spaces, Operator spaces and Applications, CIRM, Luminy, France, 2007.

〔図書〕(計１ 件)
①H. Kosaki, 査読あり
Positive definiteness of functions with applications to operator norm inequalities,
to appear in Memoirs, AMS

〔その他〕
ホームページ
http://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K000506/index.html

６. 研究組織

(1)研究代表者
綿谷 安男（WATATANI YASUO）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：00175077

(2)研究分担者
幸崎 秀樹（KOSAKI HIDEKI）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：20186612
松井 卓 （MATSUI TAKU）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：50199733
梶原 毅 （KAJIWARA TSUYOSHI）
岡山大学・大学院環境学研究科・教授
研究者番号：50169447
植田 好道 （UEDA YOSHIMICHI）
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：00314724

(3)連携研究者
増田 俊彦 （MASUDA TOSHIHIKO）
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：40241864