

平成 21 年 4 月 1 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19500004

研究課題名 (和文) 平面格子上の離散・計算幾何

研究課題名 (英文) Discrete and computational geometry on the plane lattice

研究代表者

加納 幹雄 (KANO MIKIO)

茨城大学・工学部・教授

研究者番号：20099823

研究成果の概要：平面格子上の一般の位置に置かれた赤点と青点をそれぞれ 2 等分割する直角形が存在することを示し、同時にこのような 2 等分割直角形を求める $O(n \log n)$ 時間アルゴリズムを提案した。また、3 つの凸領域で赤点と青点をそれぞれ 3 等分割できることも示した。さらに、格子線上に複数個の点の配置を許した場合にも、赤点と青点を同時に 2 等分割する準直角形の存在とその求め方など関連するいくつかの結果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：離散幾何、計算幾何、平面格子上の幾何、赤点と青点の幾何、平衡分割、

1. 研究開始当初の背景

私はこれまで平面上にある 2 色で彩色された図形を対象にした離散・計算幾何の研究をしてきた。そこでは赤い点と青い点、あるいは赤い辺と青い辺、または赤い凸図形と青い凸図形などを対象に様々な問題を研究してきた。このような問題の典型的な例としては、「平面上に $2n$ 個の赤点と $2m$ 個の青点が与えられており、これらが一般の位置あるならば、つまり任意の直線がこれらの赤点と青

点の高々 2 点しか通らないなら、赤点と青点を同時に 2 等分割する直線が存在する」というハム・サンドイッチ定理が挙げられる。この 2 等分割線を線形時間で求める高速アルゴリズムも得られている。

本研究は平面格子上に配置された 2 色で彩色された図形に対する離散・幾何の研究をすることである。これまでの平面上での研究手法もかなり利用できると思われるが、独自の工夫も必要になるだろう。平面格子上の幾何については、グラフ描画をはじめ多くの研

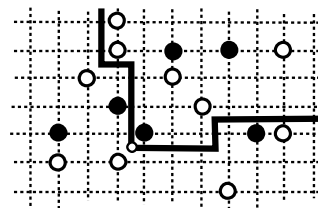
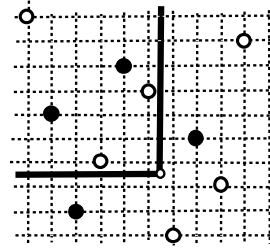
究がなされているが、ここでは赤点と青点を分割する問題を主要なテーマとする。これは、多くの2部グラフを同時に無交差で平面格子上に描画する問題とか、2つの勢力の適当な分割を見出す問題などに応用できる。

2. 研究の目的

平面上の格子とは、x軸とy軸に平行な直線分 $x=a$ と $y=b$ (a と b はすべての整数)とこれらの交点から構成される格子であり、以後これを簡単に平面格子とよぶ。平面上のハム・サンドイッチ定理を単純に平面格子上で考えると次のような問題になる。平面格子上に $2n$ 個の赤点と $2m$ 個の青点がどの格子線上にも高々1個の点しかないように配置されているとき、これらを同時に2等分割するx軸またはy軸に平行な直線は存在するか、そしてもし存在するならばそれは多項式時間で求められるか？すぐわかるように、このような直線分の存在しない赤点と青点の配置は無数にある。しかし、次のような予想を考えることができる。「平面格子上に $2n$ 個の赤点と $2m$ 個の青点があり、どの格子線上にも高々1個の点しか存在しないなら、赤点と青点を同時に2等分割する直角形が存在する。」つまりある点からでるx軸に平行な直線分とy軸に平行な直線分からできる図形を直角形とよべば、平面格子上の赤点と青点を同時に2等分割する直角形が存在する(右図の上)。本研究ではこれを証明し、そのような2等分割する直角形分割を求めるアルゴリズムを提案し、さらにその結果を発展させることである。

また、条件を緩めて、各直線上に赤点と青点が何個あってもよい条件のもとでの2等分割問題も研究する。このときには、2等分割する直角形が存在しない配置が無数にある。しかし、準直角形と言われる直角形を少し広くした図形で2等分割できそうである。準直角形は私が導入した図形であるが、次のように定義される。準直線を距離1の平行な2つの直線分を長さ1の線分でないで得られるものと定義し、準直角形をある点からx軸方向の準直線と

y軸方向の準直線からできる図形と定義する。すると次のことが予想される。「平面格子路上にある $2n$ 個の赤点と $2m$ 個の青点を同時に2等分割する準直角形が存在する(下の右図)。」この拡張予想の証明と準直角形を求めるアルゴリズムの提案も目的である。さらに、これを3等分以上の等分割へ一般化したりすることも試みたい。



3. 研究の方法

平面上の赤点と青点の平衡分割定理は、「平面上の一般の位置に a 個の赤点と b 個の青点があれば、平面を k 個の凸領域に分割し、各領域には a 個の赤点と b 個の青点があるようにできる」というもので、これは $a=1, 2$ の場合を私と金子で証明し、一般の場合を予想として提案したものである。そして、3つの研究グループによりこれは証明された。これらの証明はいずれも3分割の場合が本質で、後は帰納法を上手く用いて解決されている。そして、3分割の場合の証明はそれぞれ手法が異なっている。私は、この中の2つの手法について精通している。

加えて、赤と青の2色で着色された対象に関連する平面上の離散・計算幾何全般にわたり多くの研究をしており、これらと新しい手法により、解決できるもとを考えてい

る。

格子線上の離散幾何においても、各格子線上に高々1点しかない「一般の位置にある」点の配置が基本である。そして、格子線上に複数個の点があってもよい場合は、適当な処理をすることにより、一般の位置にある点の配置の場合に帰着させ、さらにそれを元へ戻すことにより解決できる見通しがある。アルゴリズムの精密な評価は得意でないが、多項式時間、例えば $O(n^2)$ 時間アルゴリズムの提案などは、証明ができれば、それを上手く運用してできるものと思う。

4. 研究成果

これまでに述べた予想とその発展形について、ほぼ満足できる程度に解決できた。しかし、最終的な一般化である、 k 個 ($k \geq 4$) の凸領域に平衡分割する問題は、私の国際会議での講演後 Sergey Bereg によって解決され、私が研究する必要がなくなった。まとめると下記の研究成果を得た。これらの研究成果は主に発表論文①にまとめられている。

定理 1 平面格子線上の一般の位置にある $2n$ 個の赤点と $2m$ 個の青点を同時に 2 等分割する直角形が存在する。そして、そのような 2 等分割する直角形を $O(N \log N)$, $N=n+m$, 時間で求めるアルゴリズムがある。

定理 2 平面格子線上の一般の位置に $3n$ 個の赤点と $3m$ 個の青点があるとき、平面格子を 3 つの格子の意味での凸な領域に分割し、各領域には赤点が m 個と青点が n 個あるようにできる。

定理 3 平面格子線上に $2n$ 個の赤点と $2m$ 個の青点があり、これらは格子線上に複数個あってもよい。すると、赤点と青点を同時に 2 等分割する準直角形が存在する。そして、そのような 2 等分割する準直角形を $O(N \log N)$, $N=n+m$, 時間で求めるアルゴリズムがある。

上記の平面格子線上での幾何の問題に関連して、平面上での幾何の問題、画像を幾何的に分散暗号化する問題など関連するいくつ

かの研究も合わせて行い一定の成果を得た。これらの研究は「離散数学とその応用」にふくまれるが、離散数学全般についても、一定の成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

①と⑥以外はジャーナルの慣例によりアルファベット順に著者名が並んでいる。

① M.Uno, T. Kawano and M.Kano, Bisections of two sets of points in the plane lattice, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences (電子情報通信学会論文誌 A) Vol.E92-A, 502--507 (2009) 査読有

② B.M.Abrego, E.M.Arkin, S. Fernandez-Merchant, F. Hurtado, M. Kano, J.S.B. Mitchell, J. Urrutia, Compatible Geometric Matchings Discrete and Computational Geometry, Vol. 41, 77--95 (2009) 査読有

③ M. Kano, C. Lee and K. Suzuki, Path factors and cycle factors of cubic bipartite graphs, The Discussiones Mathematicae Graph Theory, Vol. 28, 551--556 (2008) 査読有

④ M. Kano and Xueliang Li, Monochromatic and heterochromatic subgraphs in edge-colored graphs---a survey. Graphs Combinatorics, Vol. 24 237-263 (2008). 査読有

⑤ F. Hurtado, M. Kano, D. Rappaport, Cs. D. Toth, Encompassing colored planar crossing-free geometric graphs, Computational Geometry: Theory and Applications, Vol. 39, 14--23. (2008) 査読有

⑥ M. Uno and M. Kano, Visual cryptography schemes with dihedral group access structure for many images, Information Security Practice and Experience, LNCS Vol. 4464, 344-359 (2007) 査読有

⑦ M. Kano and H. Matsuda, A neighborhood condition for graphs to have $[a, b]$ -factors III, Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory, LNCS Vol. 4381, 70-78 (2007)

査読有

⑧ M. Kano and M. Uno, General balanced subdivision of two sets of points in the plane, Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory, LNCS Vol. 4381, 79–87 (2007) 査読有

⑨ A. Kaneko, M. Kano and K. Suzuki, Spanning trees with leaf distance at least four, Journal Graph Theory, Vol. 55, 83–90 (2007) 査読有

⑩ M. Kano and G.Y. Katona, Structure Theorem and Algorithm on $(1, f)$ -odd subgraphs, Discrete Mathematics, Vol 307, 1404–1417 (2007). 査読有

[学会発表] (計 16件)

① 加納幹雄 多画像ラブカードゲーム
組合せ論・離散幾何研究集会 2009/TGT20+ α
沖縄県 琉球大学 2009年3月4日

② M.Kano, Invited Talk, Spanning trees with at most k leaves, International Conference on Graph Theory and its Applications, AMRITA University, Coimbatore, Tamil Nadu, INDIA, 2008年12月11日

③ M. UNO and M. KANO, Visual Secret Sharing Schemes with Cyclic Access Structure for Many Images, The 11th International Conference on Information Security and Cryptology, Seoul, Korea, 2008年12月4日

④ 加納幹雄 Elementary graphs with respect to $(1, f)$ -odd factor, 離散数学とその応用研究集会 2008, 水戸市 三の丸庁舎茨城大学インフォメーションセンター, 2008年8月22日

⑤ 加納幹雄 Star-uniform graphs with minimum degree one, 純粋数学及び応用数学としての組合せ論・離散数学そしてその周辺ワークショップ 2008, 府中市電気通信大学 2008年7月4日

⑥ M. Kano, Y. Wu and Q. Yu, Star-uniform Graphs, 21st Cumberland Conference on Graph Theory, Combinatorics and Computing, Nashville, TN, USA, 2008年5月15日

⑦ 樫村賢治、加納幹雄, 平面三角格子上に

おけるベンド数の少ないグラフ描画, 情報処理学会 アルゴリズム研究会, 東京都千代田区 法政大学, 2008年1月23日

⑧ 宇野美由紀、加納幹雄, 平面格子上の2種点集合の平行分割問題, 情報処理学会 アルゴリズム研究会, 東京都千代田区 法政大学, 2008年1月23日

⑨ 加納幹雄, Star Uniform Graphs, 応用数学合同研究集会, 滋賀県 瀬田 龍谷大学, 2007年12月18日

⑩ M. Kano and Aung Kyaw, A Spanning tree with at most k leaves in a graph, 32nd Australasian Conference on Combinatorial Mathematics & Combinatorial Computing, University of Otago, Dunedin, New Zealand, 2007年12月6日

⑪ 加納幹雄, グラフの偶数出次数の向き付け問題, 第19回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜市 横浜国立大学みなとみらいキャンパス, 2007年11月15日

⑫ 宇野美由紀 加納幹雄, 木をアクセス構造にもつ多画像視覚型秘密分散法, 電子情報通信学会 情報セキュリティ研究会, 東京都港区芝公園 機械振興会館, 2007年9月7日

⑬ M.Kano, Balanced Subdivision of Two Sets of Points in the Plane Lattice, Kyoto International Conference on Computational Geometry and Graph Theory, Kyoto University, Kyoto, 2007年6月12日

⑭ M.Kano, Balanced Subdivision of Two Sets of Points in the Plane Lattice, CanaDAM 2007 Invite talk of Minisymposia, Banff Conference Center, Alberta, Canada, 2007年5月29日

⑮ 宇野美由紀、加納幹雄, サイクルをアクセス構造にもつ多画像視覚型秘密分散法, 電子情報通信学会 情報セキュリティ研究会, 東京都港区芝公園機械振興会館, 2007年5月18日

⑯ M.Kano, Even out degree orientation of a graph, Invited talk, The 5th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Tohoku University, Sendai, 2007年4月5日

[その他]

下記の著書の編集

① D. Avis, A. Bondy, M. Kano and N. Katoh,
Computational Geometry and Graph Theory
-The Akiyama-Chvatal Festschrift,
Springer, (2007)

② J. Akiyama, W.Y.C. Chen, M. Kano, X. Li,
Q. Yu, Discrete Geometry, Combinatorics
and Graph Theory, LNCS 4381, Springer
(2007)

③H. Ito, M. Kano, N. Kato, Y. Uno,
Computational Geometry and Graph Theory,
LNCS 4535, Springer (2008)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加納 幹雄 (KANO MIKIO)

茨城大学・工学部・教授

研究者番号：20099823

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし