

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2007～2008
 課題番号：19530576
 研究課題名 (和文) 中学生・高校生の文字式に関する知識構造の解析と文字式初習・補習教材の開発
 研究課題名 (英文) An analysis of high school students' knowledge about literal expressions for demonstration of a proposition: Toward to developing the teaching material
 研究代表者
 小野寺 淑行 (ONODERA TOSHIYUKI)
 東北大学・大学院教育学研究科・教授
 研究者番号 30109623

研究成果の概要：多くの中学生や高校生が、さらには大学生でも誤ることのある、命題の証明のための文字式使用をとりあげた。一般性を欠くことなく命題を証明するための適切な文字式使用を導くための補習用教材として、事物の個数など具体的数量に言及する命題の証明課題を与えることが一定程度効果的であることを示した。また、その種の具体的数量を題材とする教材による学習の成果をより確実なものにするためには、その具体的数量問題に固有の特殊の手がかりに過度に依存しないことが重要であるとの示唆を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	300,000	90,000	390,000
2008年度	200,000	60,000	260,000
年度			
年度			
年度			
総計	500,000	150,000	650,000

研究分野：社会科学
 科研費の分科・細目：心理学・教育心理学
 キーワード：学習過程

1. 研究開始当初の背景

わが国の教育課程の下では、文字式についての本格的な学習は中学校第1学年の数学から始まる。同第2学年用の数学教科書は、「数量などの関係や法則を一般的にかつ簡潔に表現し、処理できるようにする」(学習指導要領)ことの一環として、整数の一般的性質に関する命題等の証明のための文字式利用について学習する単元を設定している。特に「奇数と奇数の和は偶数である」という命題の証明は、多くの検定済教科書が取り上げているところである。中学校段階における

文字式による数量関係や法則の一般的表現・処理の技能やそれを支える知識の習得は、それ以降における、より高度な内容の数学学習、さらには科学・技術上の情報処理のための基礎固めとして重要な位置を占める。

しかるに、大学生にこの命題の証明を求めると、「奇数と奇数の和」を $(2n+1)+(2n+1)$ と表現してしまう者が少なからずみられる。この場合、この文字式表現は適切なものではない。そこでは2奇数を表現するのに同一の文字 n を使用しており、これでは $5+5$ 、 $11+11$ といった同じ奇数どうしの和のみを表すに

すぎず、「奇数と奇数の和」一般を表現したことにはならない。このような一般性を欠くことになる文字使用を、本研究では「同一文字による2数の表現」呼ぶ。

ところで加藤国男(196年)は、指定された範囲内の数一般の代わりとして文字を使用する際の基本的な原則を、次のように述べている(引用部分を斜体で示す)：

数の代わりに文字を用いるときは、文字の値の不確定性(可変性)が前提となっているし、文字を用いて式を作る場合には文字の値の同一性(不変性)が前提となっていて、しかも、この2つの側面は独立に現れるのではなく、同時に起こってくる。(p.200)

すなわち、(a)文字はある式の中でどのような数の代わりとしても使える(文字の値の不確定性)が、(b)その式内の複数箇所にある同じ文字は、相互に同じ数を表す(文字の値の同一性)ことになるのである。(c)それゆえ、上の $(2n+1)+(2n+1)$ における2個箇所の n は同じ数を表すことになるのである。(d)したがって、1つの式の中で、同じとは限らない2奇数の代わりとして文字を使う場合は、可能なすべての奇数同士の対を表現しうよう、たとえば $(2m+1)+(2n+1)$ のように、相互に異なる文字を用いて2奇数を表現する必要がある。

上述の証明課題に対して、一般性を欠く「同一文字による2数の表現」で対処するのは、上記(b)の原則(すなわち、『文字の値の同一性』)への準拠がなされないことによるものと思われる。このことの結果として、(b)の原則から帰結する上記(c)も(d)も意識に上ることなく、「奇数と奇数の和」が $(2n+1)+(2n+1)$ のごとく表現されるのである。

以上のようにその原因が考えられる「同一文字による2数の表現」の誤りを示す者の割合は、国立大学の学生の場合でも決して低くはない。しかも、この「同一文字による2数の表現」は、一時的な不注意などによる誤りではない。同一世代の中でも中学校段階での学習到達度が比較敵高かったと推測される大学生でも高頻度でこのような不適切な文字式使用を行うことから、中学生、高校生まで含めて考えれば、上記(b)「文字の値の同一性」原則への準拠を促すような学習援助を必要とする生徒・学生は相当の割合に達すると考えられる。

本研究は、以上のような文字式使用における誤りの背景を考慮しつつ、その種の誤りに陥らないための、またその誤りからの脱却を目指す学習援助の方策(教材、例題の選択)を追究する。

2. 研究の目的

本研究全体の目的は、一般性を欠くことにな

る不適切な文字式使用の背景にある学習者の知識構造をみきわめ、より適切な文字式使用を促進しうる教材を見出すことにある。そのために、直接的な目的と収集時期を異にする3カテゴリーの調査・実験データを分析し、逐次、文字式学習のためのより有効な教材へと接近することとした。以下、それぞれのカテゴリーに対応させて、本研究を、研究Ⅰ、Ⅱ、Ⅲに下位区分し、それぞれの直接的な目的を述べる。

- ①研究Ⅰの目的：さまざまな条件下での証明問題解決における大学生の文字式使用を比較し、それらの条件の中から、中学生や高校生が数量などの関係や法則を一般的にかつ簡潔に表現するための文字式の使い方の学習の際の、効果的な教材の候補を探索する。
- ②研究Ⅱの目的：高校生を対象に、上記の研究Ⅰで見出された教材の候補が、実際に、適切な文字式使用を促進するための有効な教材となりうるか否かを、事前テスト-処遇-事後テストのパラダイムの下での実験により確認する。
- ③研究Ⅲの目的：高校生を対象に、上記①②で取り上げた適切な文字式使用を促進する条件下での命題証明課題の解決経験により、実際に文字式使用に改善がみられる者、みられない者の違いを生み出す要因を見きわめる。

3. 研究の方法

ここでは、本研究の方法全般について概観しておく。研究Ⅰ、Ⅱ、Ⅲに固有の材料等については、研究の成果と密接に関連するので、次項「4. 研究成果」で述べることにする。

(1) 調査、実験の対象者

(人数は最終的な分析対象者数)

- ・研究Ⅰ：同一の国立大学教員養成系学部2年次学生302名(入学年度が異なる者を含む)。かれらは全員、大学入試センター試験の「数学Ⅰ」を受験していた。
- ・研究Ⅱ：東北地方の県庁所在都市にある県立M高校1年生110名。大学進学実績では同県内で上位にある。
- ・研究Ⅲ：上記と同県内の県庁所在地外にある県立K高校1年生142名。大学進学実績では同県内で上位にある。

(2) ターゲット課題

研究全体を通してのターゲット課題は、「奇数と奇数の和は、偶数である」という命題を証明する課題であった。この課題での適切な文字式使用を促進する条件は何か、という観点から各研究が計画され、また収集したデータについて分析・考察がなされた。

(3) 文字式使用の型分けとその評価

対象者の文字式使用の様態を、統一的な

基準で L1, L2, L3, L4 に分類した。ここでは、2 数に同一文字を当て一般性を欠く文字式使用は、L2 と L3 とに区分された。

L1: 「異なる二文字による 2 数の表現」(『異二文字』と略記): 2 つの数を表現するのに異なる 2 文字を用いており、数と数の対一般を表現する文字式となっているもの。

例: $(2m+1) + (2n+1)$

L2: 「同一文字と異なる数による 2 数の表現」(『同一文字・異数』と略記): 2 数を表現するのに同一の文字と異なる係数や定数を用いているもの

例: $(2n+1) + (2n+3)$ 、
 $(2n+1) + (2n-1)$ 、
 $(4n+1) + (2n+1)$

L3: 同一文字と同一数による 2 数の表現」(『同一文字・同数』と略記): 2 数を表現するのに同一の文字と同一の定数を用いているもの。すなわち、2 数がまったく同一に表現されているもの。

例: $(2n+1) + (2n+1)$

(L4: 文字を使用しないもの、および無解答のもの。これに該当するものは、分析対象から除外した。)

以上のうち、L1 は「文字の値の同一性」原則を踏まえ、2 奇数を表すのに異なる 2 文字を用いており「奇数と奇数の和」一般を表現しているものである。これに対して L2 は、一定差の奇数どうしの和、また L3 は同一の奇数どうしの和を表現している。この意味で L2, L3 は一対の奇数の和の表現としては一般性を欠くものである。ただし、L3 は、L3 では同値の奇数どうしの和(差)に過ぎないことに気付いているものの、L1 の表現法が使えない場合に採られる表現法であろうと思われる。ここでは、L2 と L3 を特に区別する必要がない場合には、両者を含めた名称として「同一文字による 2 数の表現」(『同一文字』と略記)を用いることがある。

4. 研究成果

ここでは、研究 I, II, III の順に述べることにより、本研究全体としての成果を総括していくこととする。

(1) 研究 I

研究 I では、前述のターゲット課題を含む 6 種類の条件(課題・文脈)の下での、大学生による文字式使用を比較した。6 種類の課題とは、命題 2 種(『奇数と奇数の和は、偶数である』vs 『奇数と奇数の差は、偶数である』) × 課題が埋め込まれた文脈 3 種(標準的文脈、具体物の個数、誤り指摘後)の組合せにより生成されるものである。標準的文脈とは、直裁に命題の証明を求める場合(ターゲット課題そのもの)である。具体物の個数とは、命題を「奇数個のおはじきと奇数個のビー玉の個数を合わせた数は、偶数個である」というように具体物に関するものに翻案して提示される場合である。そして、あやまり指摘後は、命題を証明するために L3: 同一文字・同数」型の文字式使用を犯した解答例を与えられ、それが誤りであることが知らされたうえで、標準的文脈で証明問題を解く場合である。

6 種の条件は、それぞれ異なる群の対象者(各群 44 名~67 名)に割り当てられた。各条件(群)ごとの各文字式使用型の出現比率を Table 1 に示す。

Table 2 条件ごとの各文字使用型の出現比率(%)

	異二文字	同一文字 ±異数	同一文字 ±同数
和・標準	32.5	25.0	42.5
〃 個数	72.7	19.7	7.6
〃 誤り指摘	34.7	30.6	34.7
差・標準	53.2	40.2	6.4
〃 個数	88.0	10.0	2.0
〃 誤り指摘	54.0	40.0	6.0

この表から読み取れる主な結果は次のとおりである(統計的検定を経ている)

i) 「奇数と奇数の和に関する証明よりは、差に関する証明の場合のほうが文字式使用の水準が有意に高かった。

ii) 和、差を問わず、標準的な証明問題と誤り指摘後証明問題の間で差がない一方で、証明問題が具体物の個数の問題として提示された文脈では、他の 2 通りの文脈に比較して有意に文字式使用の水準が高かった。

研究 I で取り上げた 6 種の証明課題の条件の中で、実際に中学校で例題や練習問題等として取り上げられるものは、「奇数と奇数の和は、偶数である」ことの証明を直裁に求めている「和・標準」である。この条件の下における大学生の文字式使用は、小関ら(1989)の報告を再現するものであった。すなわち、奇数と奇数の和を、異なる 2 文字を用いて $(2m+1) + (2n+1)$ のように適切に表現できたもの(L1)は 32.5% (文字式不使用者を除いた比率; 以下、同様)にとどまり、逆に 2 奇数に同一文字を当てて $(2n+1) + (2n+1)$ としたり、(L3: 42.5%), $(2n+1) \pm (2n-1)$ とする(L2; 25%) 不適切なものを合わせると、67.5%にも達したのである。さらに、ここでは、不適切な後二者の中では 2 奇数を L3: 同一文字・同数で表現したものが、2 奇数の定数部分を異なるものとする L2 の

1.7倍もいたことに、注目しておく。

L1型の適切な文字式が増加する条件の一つは、証明問題が、具体物の個数に関する問題として対象者に呈示される場合（個数和文脈）であった。上に引用した教科書の例題と同様に、「奇数と奇数の和」が偶数であることの証明を直裁に求めた場合のL1の出現率が32.5%であったのに対して、この条件の下では、L1の出現率は72%であった。

もう一つの条件は、証明すべき命題が「奇数と奇数の差は、偶数になる」というものであることであった。この場合のL1出現率は53%であった。同時にこの条件化下では、2奇数を、文字、定数とも同一のもので表現するL3が、もっともよく抑制された（6%）。

「個数和」の文脈のもとでは、一般性を欠く文字式使用が抑制され、適切に2数に異なる2文字を当てる文字式表現（L1）が促進されたことから、証明すべき命題をより具体的に日常的に扱う数量の文脈でとりあげるという方法が、あるいは教授方略としても有効なものではないかとも思われる。抽象的な関係の理解への前段階として、具体的な関係を利用する、という方法は、特に小学校ではよく使われる学習援助法であるが、それは、この研究でターゲットとしている命題の証明における文字式表現の学習にも有効たりうるのであろうか。

証明すべき命題が「奇数と奇数の差は、偶数である」であった場合も、同様に大学生の文字式表現の水準が向上した。しかもこの場合は、 $(2n+1) - (2n+1)$ という典型的なタイプの誤りがかなり抑制されることから、このような課題を使用することは、文字式理解の援助の一助となりうることが示唆されることである。もっとも、この場合は、たまたま証明問題が奇数どうしの差であることから、 $(2n+1) - (2n+1)$ という典型的なタイプの誤りでは、演算結果が0となることにより、その不合理性が気付かれたに過ぎないことも推測される。

いずれにせよ、これらは条件分析的研究の中で得られた結果であり、学習援助法の開発につながりうるデータとしては、事前テスト-処遇-事後テストという実験パラダイムの下で、具体物の個数和（差）の文脈での問題解決、あるいは、奇数と奇数の差に関する証明問題の解決を処遇として配置し、その効果を直裁に数学的命題の証明を求める事前・事後テストの結果の推移を観察することから得られた結果が必要であろう。この検討は、次の研究Ⅱに委ねられた。

(2) 研究Ⅱ

高校生を対象として、「奇数と奇数の和は、かならず偶数である」ことの証明問題を解くための適切な文字式表現が、命題を具体物に

関するものに翻案して提示するという処遇により促進されるかであろうか。研究Ⅱでは、事前テスト-処遇-事後テストのパラダイムの実験から得られたデータに基づき、このことを検討した。ここで、具体物の個数に翻案された命題とは、奇数個の赤いボタンと奇数個の白いボタンの和は偶数である、という内容のものである（実際には、さらに長い文章に埋め込まれて提示された）。この処遇条件は、E1(第1実験)群(38名)に与えられた。また、奇数と奇数の差に関する命題の証明を求めるE2群(35名)、統制課題として連立方程式で解く文章題を与えられたC群(37名)も設定された。群ごとセッションごとの各文字式使用型の出現比率をTable 2に示す。

Table 3 各群・セッションにおける各文字使用型の出現比率(%)

	異二文字	同一文字 ±異数	同一文字 ±同数
E1群・事前	23.7	47.4	28.9
" (個数)	39.5	21.0	39.5
" 事後	39.5	26.3	34.0
E2群・事前	34.3	34.3	31.4
" (差)	42.9	37.1	20.0
" 事後	40.0	31.4	29.6
C群・事前	27.0	35.1	37.8
(統制課題)	-	-	-
"・事後	27.0	37.8	35.1

E1群の処遇課題「奇数個と奇数個の和」は、具体物であるビー玉とおはじきがいずれも奇数個あるとして、その個数の和が偶数であることの証明を求めるものであった。証明すべき命題は事前および事後テストで課されたターゲット問題と実質的には同じ証明問題であった「奇数と奇数の和」を異なる2文字を使用して表現した（「異二文字」）は、事前テストにおいては38名中の9名（23.7%）であったが、処遇課題では15名と、有意に増加した。さらに、事前-事後テスト間でもこの差は有意のまま維持された。（Table 3）。この限りでは、整数の性質に関わる証明問題をより具体的な内容を伴った文章題として解く経験は、そのとき（処遇セッション）のみならず、その後に直裁に整数の性質に関する証明問題として呈示された場合（事後テスト）においても、「奇数と奇数」の対を異なる2文字を用いて表現することを促進する、一定の転移効果を有するものであったといえる。

しかしながら、その直後に再びターゲット問題が課せられた事後テストにおいて、同一文字による2数の表現に戻ってしまった者も4名おり、この課題の効果が一時的なもの

にとどまる可能性も低くないことを示している。具体物の個数という文脈での問題解決経験の効果がこのように一時的なものに止まる可能性としてどのような要因が考えられるであろうか。まず、この課題では2奇数は、具体的に、“ビー玉の個数”と“おはじきの個数”として示されており、その具体物の異なる2種類の名称に対応させて別々の文字をつかえば、自然に2文字を用いて表現したことになる。そこでは、かならずしも文字の値の同一性を意識する必要はない。このように文字の値の同一性が意識されることがない場合には、実質的には同じ問題がより直截に数学的命題の証明問題として提示されると、それに対して再び同一文字による2数の表現が出現する可能性が高まるのだと考えられる。この点に、具体的内容を伴った証明問題から、整数の性質を直截に問う晩への転移を制限している要因があると考えられる。

第1実験群に与えられたような、整数の性質に関わる命題を具体的な内容で彩った課題は、確かに効果的である。しかし、その効果も、たまたまそこに含まれた具体的内容に引きずられての妥当な反応を誘発するのみの効果が含まれており、それが取り払われたときには、いわば、“元の木阿弥”になりかねない可能性があることに注意しなければならない。それゆえ、次には、一定の問題構造を具体的文脈の経験の中で、何を掴み取る（あるいは掴みとれない）ことが、その経験が、その問題構造がより直截的な数学的問題として呈示された場合にも転移する（しない）ための条件となるのかを見究めることが必要である。この作業は次の研究Ⅲにゆだねることにする。

(3) 研究Ⅲ

高校生を対象に、事前テスト—処遇—事後テストのパラダイムで実験を行った。対象者は3群に分けられ、それぞれ異なる処遇A(第1実験群)B(第2実験群), C(統制群:研究Ⅱと同様)を与えられた。事前・事後テストではターゲット課題を使用した。処遇A,Bは、偶数個の赤いボタンと奇数個の青いボタンの和は奇数である、という命題の証明問題であり、その解決にあたっては、「文字の値の同一性」原則を踏まえ、「異なる二文字による2数の表現」を採用して立式する必要がある、ターゲット課題の類題である。ただし、AおよびBでは、証明問題が具体物の個数に関する問題として具体的なカバー・ストーリーに埋め込まれていた。さらに「偶数個+奇数個」の文字式表現、 $2m+(2n+1)$ が例示されている。これらのことから、AおよびBは、実質的には模範解答つきの、具体的な文脈に埋め込まれた証明問題の例題とその解法の教

示であるといえる。さらにAには、その例示とともに、 $2m+(2n+1)$ というように、異なる2文字が使用されていることを選択する課題(問1)が挿入されている(この点のみがBと異なる)。このことにより、A、Bの効果を比較することにより、2文字使用の理由について対象者が自ら考えることの効果を見積もりことが可能である。さらに、Aを使用したE1群内で、2文字使用の理由選択の如何と事後テストにおける文字式使用のこの関連についての分析が可能となる。

群ごと・テスト時期ごとの各文字式使用型の出現比率をTable 3に示す(3群の人数は、順に、50,52,50名であった)。

Table3 各群のテストにおける各文字使用型の出現比率(%)

	異二文字	同一文字 ±異数	同一文字 ±同数
E1群・事前	20.	32.0	48.0
〃 事後	42.0	20.0	38.0
E2群・事前	15.1	26.4	58.5
〃 事後	41.5	15.1	41.5
C群・事前	16.0	24.0	60.0
〃 事後	18.0	22.0	60.0

E1群(処遇A), E2群(処遇B)とも、事前から事後にかけて異二文字による文字式表現をする者の比率が有意に上昇した。しかし、この両群間に事後テストでの有意な差はみられず、異二文字使用の理由を考えさせる(E1群)だけでは、処遇の効果をさらに押し上げる効果は生じないことが示された。

E1群の対象者には、処遇課題での証明に先立ち、「偶数と奇数の和」を文字式で表現する場合、 $2m+(2n+1)$ のように、異なる2文字を使用しなければならない理由について4肢選択法で問うた。

各選択肢と、それを選んだ者の人数は以下のとおりであった。

- ア) 一方は赤、他方は青であり、両者は種類が異なる物の数だから (11名)
 - イ) 一方は偶数、他方は奇数であり、両者は性質が異なる数だから (13名)
 - ウ) 一方は偶数、他方は奇数であり、両者は大きさが異なる数だから (5名)
 - エ) 両者は無関連に決められており、お互いに関連のない大きさの数だから (11名)
- ここでは、エ)をもっとも妥当な理由として分析を進める。

ここで、E1群の対象者のうち、事前テストにおいて、不適切な同一文字使用(L2, L3)を示した者40名について、遭遇課題での2文字使用理由選択と事後テストにおける文字使用型とをクロス集計した結果をTable 4に

示す。

Table 4 挿入課題での理由選択と事後における文字使用型との連関

理由選択	事後テストでの文字使用型		
	異二文字	同一文字	計
不適切理由			
ア	2	9	11
イ	3	10	13
ウ	0	5	5
適切理由選択			
エ	6	5	11
計	11	29	40

不適切理由(ア、イ、ウ) 選択者全体(29名)の中で、異二文字使用(L1)は5名(17%)にとどまり、他の24名(83%)は同一文字使用(L2, L3)のままであった。これに対して適切理由選択(エ)者(11)では異文字使用(L1)6名(55%)で過半数を超え、同一文字使用者(L2, L3)は5名(45%)であり、この選択理由の適切/不適切の相違による異二文字/同一文字の分布の差異は、フィッシャーの直接確率計算法による検定の結果、有意($P=0.042$)なものであった。適切な理由エを選択した場合は、そうでない場合に比較して、事前テストでの2数1文字対応の誤りから脱却して事後テストにおいてより高い比率で、異二文字型の適切な文字式表現を示したのである。

以上を総括して、次の1, 2を結論および今後の検討課題として導くことができよう：

1. 事物の個数など具体的数量に言及する命題について証明する課題は、「文字の値の同一性」に準拠した文字式使用を促進するのに、一定程度、効果的な教材である。
2. 上記1の効果をより確実なものにするためには、学習者がその具体的数量問題に固有の特殊の手がかりに過度に依存せず、その場合における文字式使用法の根拠について適切に認知できるようにするための配慮をも同時に施す必要がある。この配慮を具体的にどのように行うか、また、そのことにより、文字式導入期の中学生に対して、より効果的な援助を実現できるか、という問題が今後追究されるべき課題として残されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2件)

- ① 小野寺淑行 高校生における文字式表現の誤りとその修正の試み 東北大学大学院教育学研究科『研究年報』第57集第1号, 2008年, 153-166頁, 査読無
- ② 小野寺淑行 初歩的代数問題での誤りにみる大学生の文字式理解(IV)—総括的分析からの示唆— 東北大学大学院教育学研究科『研究年報』第56集第1号, 2007年, 201-214頁, 査読無

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小野寺 淑行 (ONODERA TOSHIYUKI)
東北大学・大学院教育学研究科・教授
研究者番号：30109623

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし