

平成22年 5月20日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540001

研究課題名（和文） ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の代数幾何学的側面の研究

研究課題名（英文） Studies of algebro-geometric aspects on dynamical Yang-Baxter maps

研究代表者

澁川 陽一（SHIBUKAWA YOUICHI）

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：90241299

研究成果の概要（和文）：量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の写像解であるダイナミカル・ヤン・バクスター写像から双歪代数を構成し、そのダイナミカル表現全体がテンソル圏をなすことを証明した。前テンソル圏での余代数的対象として双歪代数が捉えられることを示し、結果として、双歪代数のこのような圏論的性質がダイナミカル表現のなすテンソル圏を生み出すことを明確にした。また、主等質空間を用いてダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成した。

研究成果の概要（英文）：We constructed bialgebroids associated with dynamical Yang-Baxter maps, set-theoretic solutions to the quantum dynamical Yang-Baxter equation. Each bialgebroid provides with the tensor category consisting of its dynamical representations. This bialgebroid is a coalgebra object of a pre-tensor category; and such category-theoretic properties give birth to the tensor category of dynamical representations. We also constructed the dynamical Yang-Baxter map by means of the principal homogeneous space.

交付決定額

（金額単位：円）

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2007年度 | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |
| 2008年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 2009年度 | 900,000   | 270,000 | 1,170,000 |
| 年度     |           |         |           |
| 年度     |           |         |           |
| 総計     | 3,200,000 | 960,000 | 4,160,000 |

研究分野：量子群の表現論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：双歪代数；ダイナミカル・ヤン・バクスター写像；テンソル圏

## 1. 研究開始当初の背景

（1）量子ヤン・バクスター方程式を単なる集合の直積上の方程式と見なしたときの解であるヤン・バクスター写像の研究は Drinfeld により提唱され、

①幾何クリスタルを用い、双有理写像としてヤン・バクスター写像を構成する方法  
②円錐曲線の射影幾何学を用いて、ヤン・バクスター写像を構成する方法  
など、構成方法がいくつか確立されていた。

(2) ヤン・バクスター写像の一般化であるダイナミカル・ヤン・バクスター写像は、研究代表者によって初めて研究された。研究代表者は、ある不変性を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像が、

①群の「非結合的な」一般化である左擬群 (left quasigroup)

②ある条件を満たす3項演算 (ternary operation)

から必ず構成されることを明らかにした。

(3) Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan は、量子ヤン・バクスター方程式の行列解であるR行列から量子群 (関数環のq-類似) を構成する方法 (FRT 構成法) を見出した。

この FRT 構成法を一般化することにより、Etingof-Varchenko は、量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の行列解であるダイナミカルR行列から量子代数を構成することに成功した。この代数は双歪代数で、そのダイナミカル表現全体はテンソル圏をなす。

さらに、彼らは良い性質を持つダイナミカルR行列から構成される量子代数はホップ歪代数となることを示した。このホップ歪代数のダイナミカル表現全体のなすテンソル圏はリジッドとなる。

(4) ベクトル空間全体のなすテンソル圏におけるブレイド関係式 (braid relation) の解がR行列である。この類似がダイナミカルR行列において成り立つ。すなわち、ベクトル空間のなすテンソル圏における射 (morphism) とテンソル積の定義を少し変えて新たに得られるテンソル圏でのブレイド関係式の解がダイナミカルR行列となる。

## 2. 研究の目的

(1) Adler-Bobenko-Suris の構成したヤン・バクスター写像から3項演算を得る。その上で、

①3項演算が満たす条件を射影幾何学の定理として表現する。

②上記定理を一般化することによって、新たな3項演算、ひいては、新たなダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成する。

(2) Berenstein-Kazhdan, ならびに Braverman-Kazhdan により構成されたヤン・バクスター写像に関しても、上と同様に新しいダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成する。

## 3. 研究の方法

(1) ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から代数を構成する。Etingof-Varchenko の方法に従い、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を線型写像と見なしたときの行列成分を用いて、代数を定義する。

(2) 上記代数が双歪代数であることを示す。

(3) (1) で構成した双歪代数のダイナミ

カル表現を構成する。最初から双歪代数としてダイナミカル表現を構成することは難しいと思われるので、まずは、ダイナミカル表現に必要な情報を集めたものを「ダイナミカル表現」として定義する。

(4) (3) で構成したダイナミカル表現全体のなす圏と、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から定まるL-作用素 (L-operator) 全体のなす圏が同型であることを示す。

(5) 上の同型を通じてL-作用素のテンソル積と対応するように、ダイナミカル表現のテンソル積を定義する。

(6) (1) で構成した双歪代数を一般化した代数を定義し、その圏の構造を把握する。

(7) (3) で定義したダイナミカル表現を上記(6)で定義した代数を用いて表現し直す。さらに、この表現を通じて、ダイナミカル表現のテンソル積を理解し、(6)で構成した圏のテンソル積の定義の端緒をつかむ。

(8) ダイナミカル表現全体がテンソル圏となる証明の構造を把握することにより、圏論的に構造を明確にする。

## 4. 研究成果

### (1) 研究の主な成果

本研究課題の主な成果は以下の通りである。

①ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随して量子代数を構成し、それが双歪代数であることを証明した。

②上記量子代数を一般化して、(H, X)-双歪代数という概念を新たに導入した。

③(H, X)-双歪代数のダイナミカル表現という概念を定義し、その全体がテンソル圏をなすことを示した。

④ダイナミカル・ヤン・バクスター写像から構成した量子代数のダイナミカル表現全体のなすテンソル圏と、このダイナミカル・ヤン・バクスター写像から定まるL-作用素全体のなすテンソル圏が、テンソル圏として同型であることを示した。

⑤前テンソル圏 (pre-tensor category) という概念を新たに導入し、②で導入した(H, X)-双歪代数という概念を一般化した。

⑥双代数は、代数全体のなす圏において余代数的対象 (coalgebra object) として定義される。これに対応する前テンソル圏での対象として、圏論的双歪代数 (categorical bialgebroid) を導入した。

⑦前テンソル圏、圏論的双歪代数に加えて、前テンソル関手 (pre-tensor functor) という概念も導入し、(H, X)-双歪代数のダイナミカル表現全体がテンソル圏をなすことを、より圏論的に証明した。

⑧ダイナミカル・ヤン・バクスター写像がブレイド関係式の解となるようなテンソル圏を導入した。このテンソル圏は、おおよそ、集合全体のなすテンソル圏における射とテ

ンソル積の定義を少し変更して得られるものである。

⑨群が単純推移的に作用する空間である主等質空間を用いてダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成した。

(2) 得られた成果の国内外における位置づけとインパクト

① (1) 研究の主な成果①で構成した量子代数は, Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan が構成した量子群 (関数環の  $q$ -類似) の一般化にあたる。また, この量子代数は Lu, 竹内光弘, Xu により導入された双重代数の例を与えている。さらにこの例は, Etingof-Varchenko により定義された双重代数とは異なり, 必ずしも双次数付き代数 (bigraded algebra) とはならないという特徴を持つ。この代数は, 双次数に関する斉次元全体のなす部分空間の直和とは必ずしもならないのである。このような量子代数の例はいままで構成されていなかった。

② (1) 研究の主な成果④は, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随した  $L$  作用素全体のなすテンソル圏を, ある代数のダイナミカル表現全体のなすテンソル圏として表すことができるということを示している。この点, 数理解析だけでなく, 圏論的にも意義深い。

③ (1) 研究の主な成果①-④は, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が, 量子 (ダイナミカル・) ヤン・バクスター方程式に関連して得られている代数構造の多くの部分を生み出していることを示している。すなわち, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像, 及びその満たす方程式は, よい一般化を与えているといえる。

④ (1) 研究の主な成果⑤および⑥で導入した前テンソル圏, 圏論的双重代数という概念の萌芽は, すでに,  $\times_A$ -双代数 ( $\times_A$ -bialgebra) の定義に見られる。本研究では, それを前テンソル圏, 圏論的双重代数として明示し, さらに, (1) 研究の主な成果⑦における前テンソル関手という概念と合わせて, 前テンソル圏の圏論的双重代数がテンソル圏を生み出す能力を持つことを明確にした。

⑤ (1) 研究の主な成果⑨では, 竹内光弘の指摘を発展させ, 主等質空間からダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成することに成功した。主等質空間は変形量子化の観点からも注目され始めた研究対象で, 本研究成果は, これと可積分系における重要な研究対象であるヤン・バクスター方程式を結びつけた点で重要である。

(3) 今後の展望

①ダイナミカル・ヤン・バクスター写像に付随したホップ重代数の構成: (1) 研究の主な成果①-⑦に記したように, ダイナミカ

ル・ヤン・バクスター写像から構成された双重代数は, ダイナミカル表現全体のなすテンソル圏を生み出す。一方「1. 研究開始当初の背景」(3) に記したように, 良い性質を持つダイナミカル  $R$  行列から構成される量子代数はホップ重代数となり, この代数のダイナミカル表現のなすテンソル圏はリジッドとなる。

そこで, 良い性質を持つダイナミカル・ヤン・バクスター写像があって, これに付随して得られる双重代数がホップ重代数となり, そのダイナミカル表現のなすテンソル圏がリジッドとなるのではないかという着想に至った。

② 代数を用いたダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成: ヤン・バクスター写像は braided group という群から構成できることが知られている。ダイナミカル・ヤン・バクスター写像もこのような代数的対象から構成できないかと考えている。特に, (1) 研究の主な成果⑨における主等質空間を用いたダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成を, 代数の視点から捉え直せるのではないかと考えている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

①Youichi Shibukawa, Mitsuhiro Takeuchi, FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps, Journal of Algebra, 査読有, 323, 2010, 1698-1728

②澁川陽一, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像, 京都大学数理解析研究所講究録 1647, 査読無, 2009, 81-96

[学会発表] (計5件)

①Youichi Shibukawa,  $(H, X)$ -bialgebroids associated with dynamical Yang-Baxter maps and their dynamical representations, 組合せ論的表現論の拓がり, 2008年10月, 京都大学数理解析研究所

②Youichi Shibukawa,  $(H, X)$ -bialgebroids associated with dynamical Yang-Baxter maps, 日本数学会無限可積分系セッション, 2008年9月, 東京工業大学

③Youichi Shibukawa, Bialgebroids related to dynamical Yang-Baxter maps, Noncommutative Structures in Mathematics and Physics, 2008年7月, ベルギー・ブリュッセル・Paleis der Academien

④ Youichi Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition, SNU-HU 5th Joint Symposium on Mathematics, 2008年1月, 韓国・ソウル・

ソウル大学校

⑤ Youichi Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps, Enigma Conference on Mathematical Physics, 2007年6月, スウェーデン・ストックホルム・Royal Institute of Technology

6. 研究組織

(1) 研究代表者

澁川 陽一 (SHIBUKAWA YOUICHI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：90241299

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし