様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　４月２２日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2009
課題番号：19540002
研究課題名（和文）堅牢なアーベル函数論の構築のための研究
研究課題名（英文）Research toward to construct a concrete theory of Abelian functions

研究代表者
大西　良博　　（ÔNISHI YOSHIHIRO)
岩手大学・人文社会科学部・准教授
研究者番号：60250643

研究成果の概要（和文）：良きにつけ悪きにつけ，高校で学ぶ三角函数を無視した社会は有り得ない．Abel 函数とはこれを高度に一般化した函数であつて，これまた，将来に渡つて非常に重要な役割を果たす函数であることは疑ひない．Abel 函数には種数といふものが与へられてゐる．三角函数は種数 0 の函数で，楕円函数は種数が 1 の函数である．これらについての理論に比べ，種数 2 以上の Abel 函数の理論は抽象的な理論が先行してゐて，具体的に計算の可能な理論が貧弱であつた．そこで，具体的な計算が可能な理論の骨格を建設した．

研究成果の概要（英文）：Currently, it is impossible for us to discuss the World without trgonometric functions. Abelian functions are advanced functions that highly generalizes the trigonomatric functions, and will be, no doubt, very important functions in the future. Any Abelian function has a number that called “genus”. Trigonometric functions are of genus 0 and elliptic functions are of genus 1. Athough these functions have very concrete theory, Abelian functions of genus greater than 1 has so poor in concrete theory. Through this project I constructed a very concrete theory of Abelian functions of genus greater than 1.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・対数学
キーワード：数論，数論幾何

１．研究開始当初の背景

次元 2 以上の Jacobi 多様体，Abel 多様体論について，それの高度な一般論のみあつて，具体的な（計算機でできる様な）計算ができる様な理論に乏しかつた時代は終りつつあり，今では，種数 2 ならばいくつかの具体的な計算のできる理論が存在してゐて，それによる結果も得られてゐる．し

かし，より次元の高い Abel 多様体においては未知な事柄もまだ多くあり，そのさらなる研究のためには，次元の高い場合についても計算のしやすい Abel 函数論を構築するのが強く望まれ，多くの研究者にとつてより計算実験のし易い理論を立ち上げることが重要である．実際，暗号理論の方面や数理物理の研究者にも，その様な環境は切望されてゐるし，初学者にとつても，具体的な理論は導入としても非常に重要である．申請者は，代数的加法公式や Jacobi 多様体の定義方程式，Abel 函数体などを書き切ることについて相当の成果をあげてゐる ([**06b**] など)．また，数論では $\sin u$, $\exp(u)$, $\log(1+u)$, Weierstrass の $\wp$ 函数 $\cdots$ などの様に具体的な函数が大きな力を発揮する．例へば円分体論で主役を演ずる Bernoulli 数などはその顕著な例であつて，それはある具体的で特殊な函数の冪級数展開の係数であるが，これの Abel 函数版の有力な候補が申請者によつて得られてゐる ([**03a**])．本計画はこの様な確かな道の上の立案されてをり，それは，科研費補助金を利用してこの方向で申請者自身によつてここ数年行はれてきた研究を更に発展 させるためのものである．

文献表

[**06d**] J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, S. Matsutani, Y. Ônishi, E. Previato : "Addition formulae over the Jacobian pre-image of hyperelliptic Wirtinger varieties" http://web.cc.iwate-u.ac.jp/~onishi/publications.html

[**06c**] J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, S. Matsutani, Y. Ônishi, E. Previato : "Abelian functions for purely trigonal curves of genus three" http://arxiv.org/abs/math.AG/0610019

[**06b**] Y. Ônishi : "Determinant expressions in Abelian functions for purely pentagonal curves of degree six" http://web.cc.iwate-u.ac.jp/~onishi/publications.html

[**06a**] Y. Ônishi : "Abelian functions for trigonal curves of dgree four and determinantal formulae in purely trigonal case" http://arxiv.org/abs/math.NT/0503696

[**05f**] 大西良博 : "Frobenius-Stickeberger-type formulae for purely d-gonal curves with unique point at infinity", 数理解析研究所講究録「代数的整数論とその周辺」, 13 pages

[**05e**] V. Z. Enolskii, S. Matsutani, Y. Ônishi : "The addition law attached to a stratification for a hyperelliptic Jacobian variety" http://arxiv.org/abs/math.AG/0508366

[**05d**] Y. Ônishi : "Determinant expressions for hyperelliptic functions (with an Appendix by Shigeki Matsutani: Connection of The formula of Cantor and of Brioschi-Kiepert type)" Proc. Edinburgh Math. Soc., 48(2005)705-742

[**05c**] Y. Ônishi : "Theory of generalized Bernoulli-Hurwitz numbers for algebraic functions of cyclotomic type and universal Bernoulli numbers" http://arxiv.org/abs/math.NT/0406096

[**05b**] Y. Ônishi : "Kummer's Original Type Congruence Relation for the Universal Bernoulli Numbers" http://arxiv.org/abs/math.NT/0312178

[**05a**] 大西良博 : "円分型代数函数版 Bernoulli-Hurwitz 数と普遍 Bernoulli 数の理論" 「2004 数論セミナー 静岡」報告集 pp.1-91

[**04**] Y. Ônishi : "Determinantal expressions for hyperelliptic functions in genus three" Tokyo J. Math., 27(2004)299-312

[**03b**] 大西良博 : "普遍 Bernoulli 数に対する Kummer の原論文型合同式 (上記の日本語版)" 「2003 数論セミナー 静岡」報告集 pp.111-126

[**03a**] 大西良博 : "Bernoulli-Hurwitz 数の理論の円分型代数函数版" 数理解析研究所講究録 1376 「代数的整数論とその周辺」,(2004)50-60

[**02**] Y. Ônishi : "Determinant expressions for Abelian functions in genus two" Glasgow Math. J., 44(2002)353-364

2. 研究の目的

(1) 研究対象について どんな楕円曲線も（基礎環が何でも）

$$\begin{aligned} &y^2 - (\mu_1 x + \mu_3) y \\ &\quad - (x^3 + \mu_2 x^2 + \mu_3 x + \mu_4) = 0 \\ &\qquad (\mu_j \text{ は定数}) \end{aligned} \tag{0.1}$$

形の方程式で定義されることが知られてゐるが, これにならつて, 本計画では, 一例として

$$
\begin{aligned}
(0.2)\qquad & y^3 - (\mu_2 x + \mu_5) y^2 \\
& \quad - (\mu_4 x^2 + \mu_7 x + \mu_{10}) y \\
& \quad - (x^5 + \mu_3 x^4 + \mu_6 x^3 \\
& \qquad + \mu_9 x^2 + \mu_{12} x + \mu_{15}) = 0
\end{aligned}
$$

なる方程式で定義される曲線（これは種数 4）を考察する. 実際には, さらに一般に

$$y^d - x^s - \sum_{a,b} \mu_{ds-ad-bs}\, x^a y^b = 0$$

（ただし $\gcd(d,s)=1$ で $0 \leqq a < d$, $0 \leqq b < d$ で $ad+bs < ds$）の形で定義される代数曲線を主に扱ふ. この型の曲線を (d,s)**-curve** と呼ぶ. これまでの申請者の研究により, 超楕円曲線 (つまり $d=2$) の場合を始めとして, いくつかの場合に立証されたことを挙げる：

1. 無限遠には 1 点のみ存在するが（それを単に ∞ と記す）, そこにおける極の位数でもつて weight を付ける, 即ち x と y の weight をそれぞれ $-d$, $-s$ とすることで, この曲線に対応する Abel 函数の様々な等式が homogeneous weight になる;
2. この曲線の Jacobi 多様体に自然な stratification を導入することで, (1) の様々な等式を偏微分して得られる等式が各階層（stratum）で非常に有効に働く;
3. また, この型の曲線は全代数曲線の中でも比較的大きな family をなしてゐるので, まずはこの型の曲線で, 研究を進めて, その後より一般の曲線に向ふのが有効だと考へられる, 等々

特に (2) によつて, Abel 函数を 1 変数函数の “積み重ね” として眺めることができ, それをうまく総合することで, 多変数函数としての構造を復元し, より明晰な理解を得ることができる. その顕著な結果として Bernoulli 数の高い種数の Abel 函数への一般化が筆者により得られてゐる（[**05c, 05a, 03a**]）.

この様に, 本計画は一般の (d,s)-curves について, 計算による実験などを想定した具体的で堅牢な Abel 函数論を構成することが目的である.

(2) 具体的な目標とその意義
以下, 本研究で得られると予想された成果について述べる.

《Frobenius-Stickelberger 型の行列式表示公式》 筆者が構築しつつある determinant formulae の理論全体は addition formulae の基本構成要素である. これ以前は, 代数的加法公式は非常に特殊なものを除けば, その存在のみを述べたものしか存在せず, これを簡明に記述する理論はなかつたといつてよい. 筆者の与へた Frobenius-Stickelberger 型の公式（[**06b, 06a, 05f, 05d, 04, 02**]）は記述が具体的かつ簡明なので, 代数的加法公式を深く調べたり, 具体的に応用する際には, 非常に有用になると思はれる. 従つて, これらの総合的な研究を目的とする本計画の実行が必要である.

《代数的加法公式》 上のことの補足になるが, 一般に言はれる代数的加法公式は, 多変数の公式であり, 複雑である. $d=2$ の場合, つまり超楕円曲線についてはBuchstaber, Enol'skii, Leykin 等により, 相当な解明がなされた. しかし, $d \geqq 3$ の場合は知られてゐることはほんの僅かである. しかし, 筆者等により（[**06d**]）, $(d,s)=(3,4)$ の場合の代数的加法定理の具体的な形を得ることができた. この方向を押し進めることで, $d=3$ の場合の代数的加法公式の一般形を得るのもひとつの目的である.

《n 倍公式》 n 倍公式についても, 古典的な目論見で得られるものは非常に複雑になつてしまふのに対して, 筆者の得た Frobenius-Stickelberger 型公式の極限として得られる n 倍公式（楕円函数のときは Kiepert の公式）はとても簡明である. いまのところ, 超楕円曲線などの特殊な場合（[**06b, 06a, 05f, 05d, 04, 02**]）を除くと, （申請者自身による）予想のみあつて証明ができてゐないので, それの完成を目指す.

《Fay's general formula との関係》 John Fay の得た general formula なるものは, 一般の境界なし Riemann 面の Frobenius-Stickelberger 型の公式であるが, 大変抽象的なので, 具体的な計算を実行できない. 一方筆者の結果は簡明ではあるが一般の Riemann 面を包括するところまで拡大できてゐない. しかも, この両者も関係は mysterious であつた. ところが, 昨年九州大の中屋敷厚氏が筆者の公式と Fay の公式とも関係を初めて捉へることに成功した. これにより, 一

般の代数曲線の Jacobi 多様体に対する代数的加法公式を得るための視点が増えたことになる．中屋敷氏の発見は自然に $d=2$ の場合のものであるが, 間も無く $\geqq 3$ にも拡張されると思はれる. その方向で必要な結果を導くことも本計画のひとつの目的である.

《Jacobi 多様体の定義方程式》Buchstaber, Enol'skii, Leykin 等の理論は Jacobi 多様体の定義方程式を matrix construction なる方法で実現を試みてゐる．一方 Jacobi 多様体の定義方程式を書き切るためには, 適当な因子 (divisor) 上にのみ極を有する Abel 函数全体のなす環の構造を具体的に決定すれば良い．申請者は彼等とは独立に Jacobi 多様体に階層構造を入れたものについて, 精密に Abel 函数の環を分析してゐた．実際, これの成果が上記の Frobenius-Stickelberger 型の公式の証明の基礎になつた． 彼等の理論を分析すると同時に, 筆者の分析との関係を明確にし, Jacobi 多様体の方程式をできるだけ具体的かつ実用的に書き切ることが目的である.

3. 研究の方法

(1) 海外研究者の招聘と申請者の出張による研究交流

本研究計画では, 海外研究者の招聘や申請者自身の国内出張により, その都度, 明確にされた問題を集中的に議論する事が要となつている. 実施内容を, 年度別に述べれば次の様になる：

2007 年度　当該分野の現状と問題点を明確にするために申請者自身が国内出張を行ひ, 密接な学術的議論の展開,

2008 年度　中間報告を兼ねた現状分析のために海外研究者を招いた研究会を開催する,

2009 年度　国内を中心とした研究の細部の詰めの為に海外出張. 最終的な取り纏めと発表と論文の執筆, Web での発信.

(2) 招聘と出張の状況

出張先とその時期を記録しておく.

2007 年度

- 2008/3/9-3/11 早稲田大学, 「整数論 研究集会」に参加
- 2008/1/22-1/25 京都大学 「保型形式 研究集会」に参加
- 2007/12/08-12/12 首都大と京都大 「代数的整数論とその周辺 研究集会」に参加
- 2007/09/23-09/24 東北大学 「日韓交流 整数論シンポジウム」で講演
- 2007/08/21-08/24 花巻大沢温泉 「第 15 回 整数論サマースクール」を主催
- 2007/7/24-7/25 首都大学 「整数論セミナー」

2007 年度

- 2008/12/07-12/13 京都大学 「代数的整数論とその周辺」研究集会に参加
- 2008/8/17-21 幕張メッセ国際会議場「第 16 回 整数論サマースクール」に参加
- 2008/7-17-8/01 Eilbeck 氏と Enol'skii 氏を岩手大学に招聘

2009 年度

- 2009/7/25-2009/8/10 Edinburgh に出張 (旅費の一部を Edinburgh 数学会から支給)

(3) 出張や招聘時の具体的な研究活動　出張および招聘の主な目的は以下の項目の現状について, 緊密な議論をすることであつた.

(1) Frobenius-Stickelberger 型の行列表示公式,
(2) 代数的加法公式,
(3) n 倍公式,
(4) J. Fay による general formula と (1) の公式との関係,
(5) Jacobi 多様体の定義方程式
(6) 普遍 Bernoulli 数や一般 Bernoulli-Huriwitz 数とその周辺

2008 年度の中心は, 当該分野の現状と当面の問題点を明確にするために, J.C. Eilbeck (Heriot-Watt 大学), V.Z. Enoliskii 氏 (Heriot-Watt 大学) を海外から岩手大学に 2 週間, 招聘し密接な学術的議論など, 研究交流を行つた事である.

来日した Enol'skii 氏, Eilbeck 氏とは主に (5) に関し, 種数 2 に絞つて議論を行つ

た．まづ, 申請者が基本的な idea を説明し, それに沿つて, 主に Eilbeck 氏が computer 実験を行ない, 問題が生じた際には申請者と Enolsk'ii 氏が idea を出し合つて解決する, といふ手順を踏んだ．

2009/7/25-2009/8/10 の Edinburgh 訪問では J.C. Eilbeck (Heriot-Watt 大学), Matthew England (Heriot-Watt 大学), John Gibbons (London 大学) の 3 名と (3,4)-curve の Jacobi 多様体上で, Abel 函数のなす次数付き環の小さい次数のところの基底を決定する, といふ問題について議論をした．

その他の項目については, 申請者の国内出張では, この研究交流で明確になつた問題点で, 未解決のものについて, 国内各地の関係する研究者から, 応用できる可能性のある先端的な理論などについて review を受けたり, 議論などを行つた．

4. 研究成果

(1) 主な成果

① $(3,4)$-curve についての Frobenius-Stickelberger 型公式を証明し，超楕円曲線以外でもその様な公式が存在することを初めて発見した．[3].

② $(3,4)$-curve についての代数的加法公式の完成させて, 論文 [1] として発表した．これは最も一般的な形の $3,4$-curve についての代数的加法公式と付随する Abel 函数の関係式を網羅的に詳述した論文である．

③ 申請者の発見した Frobenius-Stickelberger 型の公式を $3,4$-curve 以上に拡張する次の関門は $(5,6)$-curve であるが, これついての Frobenius-Stickelberger 型公式に関して, 長い計算の結果, その公式を証明したが [6], そのままでは, 一般の (n,s)-curves に対する証明とはならないため, 名古屋大学の鈴木浩志氏に協力を要請し, 双方が出張すること（計 2 回）で議論を交して, ある程度の証明の道筋を掴んだ．

④ $(3,4)$, $(5,6)$-curve についての n 倍公式（Kiepert 型公式）は Frobenius-Stickelberger 型の公式から導くことができ, それについては [3], [6] に述べた．

⑤ 上の ①, ③, ④ は purely d-gonal の場合だけであるが, さうでない curve についても同様の公式を与へることができた．これは現在執筆中である．

⑥ non-hyperelliptic curves の Jacobi 多様体の定義方程式については調べる事が非常に多くあり, まだ一言で述べられる結果はないが, Eilbeck 氏その他との研究交流で $(3,4)$-curve についていくつかの筋を追い始めることができる様になつた．

⑦ 円分型の n,s-curves についての特殊な代数的加法公式については, `http://arxiv.org/abs/0803.3899` に "Some addition formulae for Abelian functions for elliptic and hyperelliptic curves of cyclotomic type" として upload してある．

⑧ 楕円曲線に付随する sigma 函数の数論的局所径数による冪級数展開を与へた．これの応用として, sigma 函数の Hurwtz 整性の証明と一般 n 倍多項式の最初のいくつかの係数を n の多項式として与えた．⑨ Tate-Shafarevich 群の位数と Hecke の L 函数の中心点での特殊値との間の合同式を Hurwitz 数（対応する楕円函数の冪級数展開の係数）との合同式で与へる, といふ結果を得て [4] に発表した．

⑩ (n,s)-curves について, その代数的加法定理を行列式表示で与へる結果を得た．それを [7] と [2] に発表した．

⑪ $3,5)$-curve（種数 4）についての代数的加法公式などを [1] に即した形まで計算し, [5] に発表した．

(2) 成果の国内外での位置付けと impact

① 数学の中においても非常に基礎的で広範な分野の応用を想定した研究であるので, 筆者の研究は広く知れ渡りつつあり, 堅牢で具体的な記述は広い分野において研究を飛躍的に発展させるのに貢献するといふ, 当初の見通しが確かめられつつある．

② ここまで成果の impact はすぐには読み取れない．しかし, 楕円函数の場合の様に何人かの研究者がこれを操り始めてゐる．実際, 数理物理や数論幾何の研究者の論文のいくつかに引用されはじめてゐる．

(3) 今後の展望

今後の発展は計り知れないが, まだ詰めなければならない重要な論点がある．とくに

① sigma 函数の Hurwitz 整性の証明,

② sigma 函数の vanishing についての仮説を証明すること

が大きな目標であらう.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計７件）

①Y. Ô nishi. Congruences relations connectiong tate-shafarevich groups with hurwitz numbers. Interdisciplinary of Information Sciences, 16(1):71–86, 2010.査読有

② Y. Ô nishi. Abelian functions for trigonal curves of dgree four and determinantal formulae in purely trigonal case. International Journal of Mathematics, 20(4):427–441, 2009.査読有

③J.C. Eilbeck, V.Z. Enol'skii, S. Matustani,Y. Ô nishi, and E. Previato. Addition formulae over the jacobian preimage of hyperelliptic wirtinger varieties.
Journal f ü r reine und angewandt Mathematik, 619:37–48, 2008.査読有

④ S. Baldwin, J. C. Eilbeck, J. Gibbons, and Y. Ô nishi. Abelian functions for cyclic trigonal curves of genus 4. Journal of Geometry and Physics, 58(4):450–467, 2008.査読有

⑤ V.Z. Enolskii, S. Matsutani and Y.Ô nishi. The addition law attached to a stratification for a hyperelliptic jacobian variety. Tokyo Journal of mathematics, 31, 27-38,2008.査読有

⑥ S. Matsutani and Y. Ô nishi.
Determinant expressions in abelian functions for purely pentagonal curves of degree six.
http://web.cc.iwate-u.ac.jp
/~onishi/, 2007.査読無

⑦ J.C. Eilbeck, V.Z. Enol'skii, S. Matustani,Y. Ô nishi, and E. Previato. Abelian functions for trigonal curves of genus three. International Mathematics Research Notices, http://imrn.oxfordjournals.org
/cgi/content/abstract/2007/rnm140
/rnm140,　2007.査読有

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
なし

〔その他〕
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
大西　良博　　（ÔNISHI YOSHIHIRO）
岩手大学・人文社会科学部・准教授
研究者番号：60250643

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
尾臺　喜孝　　（ODAI YOSHITAKA）
岩手大学・人文社会科学部・教授
研究者番号：10204215
（H19:研究分担者
H20～H21:連携研究者）