様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年　4 月 14 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：　2007　～　2009
課題番号：19540003
研究課題名（和文）　トーリック多様体の同変写像とベクトル束に関する研究

研究課題名（英文）　Study on equivariant mapps of toric varieties and vector bundles

研究代表者
尾形　庄悦　（OGATA　SHOETSU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90177113

研究成果の概要（和文）：非特異 3 次元トーリック多様体上のアンプル直線束について、その随伴束が正でないものを分類し、単生成的であることを示した。また、その随伴束が正である場合の随伴束の大域切断の空間の特徴付けを与え、随伴束が正だが巨大ではないときも元のアンプル直線束が単生成的であることを示した。
2 次元の特異トーリック多様体上のアンプル直線束とネフ直線束の大域切断の積写像が全射であることを示した。これは、ある種の特異点を持つ 3 次元トーリック多様体上のアンプル直線束の単生成性の解明に役立つ。
また、3 次元弱ファノ・トーリック多様体上のアンプル直線束が単生成的であることを示した。

研究成果の概要（英文）：We classify ample line bundles on nonsingular toric 3-folds whose adjoint bundles are not effective and prove that those ample line bundles are normally generated.　We characterize the space of the global sections of the adjoint bundle when it is effective.　From this we prove the normal generation of ample line bundle whose adjoint bundle is effective but not big.
We also prove that the multiplication map of global sections of an ample line bundle and a nef line bundle on a singular toric surface is surjective.　We may use this surjectivity to investigate normal generation of ample line bundles on a certain singular toric 3-fold.
Moreover, we succeeded to prove that any ample line bundles on toric weak Fano 3-folds are normally generated.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何、トーリック多様体

１．研究開始当初の背景

n 次元トーリック多様体上のアンプル直線束は、n-1 回以上テンソル積をすれば、単生成的であることが知られている。アンプル直線束が単生成的なら、射影正規的埋め込みを定める。このとき、定義イデアルについての情報を得ることが比較的容易になる。

例えば、n 次元トーリック多様体上のアンプル直線束を n 回以上テンソル積すれば、定義イデアルが 2 次の元で生成される。また、その直線束が、元々単生成的なら、n+1 次以下の元で、定義イデアルが生成される。2 次元では、2 次の元だけで生成される場合が特徴づけられている。これには、多様体が非特異である場合が含まれる。

スツルムフェルスは、非特異な射影正規的トーリック多様体の定義イデアルは、2 次の元のみで生成されるであろうと予想した。3 次元以上では、簡単な例でのみ確かめられている。

我々は、3 次元では、アンプル直線束を 2 回以上テンソル積したら、定義イデアルは 2 次の元のみで生成されることを示していた。

この予想を前提条件であるアンプル直線束の単生成性は、確かめにくい。そこで、その十分条件を探すことが重要になる。

我々は、3 次元トーリック多様体で射影空間の商空間であるものについて、その上のアンプル直線束が埋め込みを定めるとき単生成であることを示していた。一般の特異多様体では、反例がある。

２．研究の目的

トーリック多様体上のアンプル直線束は、どんな条件を満たせば単生成的になるか、その条件を求めることを第一の目的にする。

それ満たされたときに、定義イデアルの生成元の次数の評価を第二の目的にする。特に、2 次の元のみで生成される場合を特徴づけたい。

単生成性については、今までに得られていた非特異な 3 次元トーリック多様体での随伴束に対する条件を弱め、また、緩やかな特異点を持つ場合にも拡張する。4 次元の場合に拡張するために、3 次元で、アンプル直線束とネフ直線束の積写像の性質を研究する。この結果を使って、ある種の 3 次元トーリック多様体の定義イデアルが 2 次生成であることを示す。

また、良い有理写像で、その双有理モデルでは、像が完全交叉となるものを見つける。それができれば、射影空間のある種のベクトル束に対し、良い双有理モデルへの引き戻しが分裂するようにできる。

３．研究の方法

非特異な 3 次元と 4 次元の整凸多面体の多数の例に対して、コンピュータの助けを借りて、正規性と定義イデアルの生成元の次数の評価を計算する。
3 次元整凸多面体の正規性を判定するソフトウエアを開発したドイツのブルンス教授を訪ねて、そのソフトの使用許可を得るとともに使用法を学び、共同研究をする。

4 次元については、3 次元から類推できる例を多く見いだす。その結果を分析して、代数幾何的証明を考える。また、トーリック多様体に限らず、一般の射影代数多様体に通用する代数幾何の手法を見つけるために、代数幾何の研究集会に参加する。特に、アンプル直線束の随伴束のネフ性に関する藤田の研究を我々の場合に取り入れることを試みる。

代数幾何の理論では、特異点を持つ場合を扱っているから、さらに、緩やかな特異点を持つ 3 次元整凸多面体についても計算する。

また、連携研究者石田とともに、トーリック多様体の定義イデアルの生成元に関する性質を扇の圏と関手の言葉で定式化して、問題解決に努める。

連携研究者原とともに、正標数のフロベニウス写像による順像や引き戻しの半安定性から、もとの直線束のコホモロギーを研究する。

４．研究成果

第一の成果として、非特異 3 次元トーリック多様体上のアンプル直線束でその随伴束が正でないものの分類をした。言い換えると、内部に格子点を含まない整凸多面体を分類した。

この分類で、2 次元トーリック多様体上の射影直線束、射影直線上の射影平面束、3 次元射影空間とこれらから何点かでブローアップしたものだけが現れることが分かった。

この結果とファクルディンの結果「2 次元非特異トーリック多様体上のアンプル直線束とネフ直線束の積写像が全射である」を組み合わせて、これらの直線束が単生成的であることが分かった。

3 次元非特異多様体上のアンプル直線束の随伴束のネフ性判定に関する藤田の結果のトーリック多様体版を定式化して、ネフでない場合を特徴づけた。これと第一の場合の証

明は、随伴束が正であるが巨大でない場合にも有効であることが分かり、単生成性の証明を与えた。これらの結果は、論文Projective normality of nonsingular toric varieties of dimension threeとして投稿中である。この研究から、随伴束が巨大である場合への研究方針が得られた。

この結果と以前の結果について、カリフォルニアのアメリカ数学研究所での会合で発表し、ブルンス教授と情報交換できた。

第二の成果として、緩やかな特異点を持つ3次元の場合に使えるであろう補題として、「特異点を許す2次元トーリック多様体上のアンプル直線束とネフ直線束の積写像が全射である」を証明した。これは、非特異の場合のファクルディンの結果の拡張である。我々の証明では、代数幾何の手法を使った。組み合わせ論の人々も別の方法で証明を与えた。これにより、3次元ゴレンスタイン・トーリック・ファノ多様体の反標準束の単生成性の別証明が得られる。

この結果を佐賀大学での研究集会で発表し、また、ニュージーランドのオークランド大学で開かれた研究集会「組み合わせと計算数学」で発表した。そして、論文On multiplication maps of ample bundles with nef bundles ontoric surfacesとして、出版した。

第三の成果として、3次元の弱ファノ・トーリック多様体上のアンプル直線束が単生成的であることを証明した。随伴束がネフである場合に帰着するのが1つ目のアイデアで、随伴束が巨大でないとき、2次元の結果を上手に使って、代数幾何的にアンプル直線束の単生成性を証明した。これは、第一の成果の別証明を与えている。

随伴束がネフかつ巨大である場合の証明が本質的であり、ファノ多面体と3次元凸多面体のミンコフスキー和の正規性の証明が難しいものであった。二つの多面体を分割して、それらのミンコフスキー和の正規性を代数幾何の手法で証明し、元の多面体のミンコフスキー和の正規性を示すという複雑な手順を踏む。これを代数幾何的に翻訳する。つまり、ネフかつ巨大な随伴束とネフかつ巨大な半標準束の積写像の全射性が示される。再び、代数幾何から、随伴束がネフでない場合を回復する。

この結果は、3次元トーリック多様体を固定して、その上のすべてのアンプル直線束の単生成性を示している。この種の研究では、多様体とその上のアンプル直線束の組に対して、考えられてきた。第一の成果の前半部分も、その随伴束が正でないという条件から、多様体が限定されている。この意味で、初めての画期的成果であるといえる。

これも、論文Nef and big divisors on toric 3-folds with nef anti-canonical divisorsとして投稿中である。

この結果について、佐賀大学の研究集会で発表し、また、中国の復旦大学と東北大学の合同代数幾何学シンポジウムでも発表した。

第四の成果として、第三の成果の方法を二つの3次元凸多面体のミンコフスキー和の場合に拡張することが進行中である。この応用として、反標準因子の定める有理写像が概有限でる3次元トーリック多様体上のすべてのアンプル直線束が単生成的であることを示せる。この結果は、Minkowski sums and normality of lattice polytopesとしてまとめて、投稿準備中である。

この成果も、半標準因子の定める有理写像が概有限な3次元トーリック多様体を固定して、その上のすべてのアンプル直線束の単生成性を主張している。この方法のさらなる発展形を見つければ、多様体を固定した形での他の場合にも拡張できる。また、定義イデアルの2次生成についても、この方法を進めて何らかの結果を得るためのアイデアだけは得られた。

トーリック多様体上のベクトル束につては、今回の研究で、発表できる程の成果はあげられなかった。

連携研究者石田は、以前から必ずしも扇と対応しないトーリック多様体、つまり、正規性を仮定しないトーリック多様体に興味を持ち、その上の加群の圏を研究してきた。今回、加群の複体の成す圏について、研究の途中経過を復旦大学と東北大学の合同代数幾何学シンポジウムで発表した。

連携研究者原は、以前のF有理特異点とF純性の研究と直線束のフロベニウス順像の研究を見直すことにより、フロベニウス・サンドウィッチ構造を持つ多様体の研究が重要であるとして、いくつかの例について計算している。発展の手応えを感じているようだが、まだ発表できる程には、まとまらなかった。研究の途中経過を復旦大学と東北大学の合同代数幾何学シンポジウムで発表した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

1. 尾形庄悦　近藤大樹、On multiplication maps of ample bundles with nef bundles on toric surfaces, Interdisc. Inform. Sciences、査読有、14-2巻、2008年、183-190

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計　０件）

６．研究組織

(1)研究代表者

尾形　庄悦 (OGATA　SHOETSU)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90177113

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

石田　正典 (ISHIDA　MASANORI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30124548

原　伸生 (　HARA NOBUO　)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90298167