

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目： 基盤研究 (C)
 研究期間： 2007~2010
 課題番号： 19540005
 研究課題名 (和文) Hilbert-Speiser 型の代数体と Stickelberger Ideal
 研究課題名 (英文) Hilbert-Speiser number fields and Stickelberger ideal

研究代表者
 市村 文男 (ICHIMURA HUMIO)
 茨城大学・理学部・教授
 研究者番号： 00203109

研究代表者の専門分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数環、正規整数底、Hilbert-Speiser の定理、Stickelberger ideal

1. 研究計画の概要

P を素数とする。円分体論の基本的な事柄の一つは Stickelberger ideal が p 分体のイデアル類群を消すという Kummer の定理である。Hilbert は有理数体上の tame なアーベル拡大の正規整数底に関する Hilbert-Speiser の定理を用いてこの定理の別証明を与えた。このことは Kummer-Stickelberger の定理と整数環の構造が密接に関連することを示唆している。この研究の主目標はこの関係を可能な限り一般化することである。具体的に述べる。

(1) 代数体 F の整数環を O_F とし p 整数環を O'_F とする。 O_F よりも O'_F の方が扱いやすい対象なので O'_F を主体に考える。F が条件 $H'(p^n)$ を満たすとは F 上の全ての exponent が p^n の約数となるアーベル拡大が O'_F について正規底を持つことを言う。また、F が全ての n で $H'(p^n)$ を満たすとき、F は条件 $H'(p^\infty)$ を満たすという。各 n に対して $H'(p^n)$ を満たす必要十分条件を何らかの Stickelberger ideal を用いて記述し、さらに非常に強い条件 $H'(p^\infty)$ を満たす代数体の例を挙げる。

(2) 代数体 F が条件 $H(p)$ を満たすとは F の全ての tame な p 次巡回拡大が本来の整数環 O_F について正規底を持つことを言う。この条件を満たす虚アーベル体を決定すること。

2. 研究の進捗状況

上記概要に述べた (1)、(2) とも極めて順調に進んでいる。それぞれに分けて進捗状

況を述べる。

(1) p が奇素数の場合には研究が完了した。その成果は論文②及び論文⑤で発表した。以下その内容を大雑把に解説する。 G_n を剰余環 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の乗法群とし、 S_n を G_n に付随する Stickelberger ideal とする。 G_n の部分群 H に対して、 S_n の H 部分として H の Stickelberger ideal を定義した。基礎体 F に 1 の p^n 乗根を添加した体を K_n とする。ガロア群 $\text{Gal}(K_n/F)$ は自然に G_n の部分群と看做せるが、この時これに付随する Stickelberger ideal を $S_{F,n}$ とする。最も主要な結果は

定理：上の設定の下で、代数体 F が $H'(p^n)$ を満たす必要十分条件は ideal $S_{F,n}$ が K_n のイデアル類群を消すことである。

この結果は「計画の概要」に述べた Hilbert の仕事の一般化に当たる。これを用いて、p 分体の部分体で条件 $H'(p)$ を満たすものを決定した。特に、conductor p の虚 2 次体でこの条件を満たすものは、 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ で $p=3, 7, 11, 19, 43, 67, 163$ に限ることを示した。更に、p 冪分体の類数についてのある予想を認めれば、上記の虚 2 次体は非常に強い条件 $H'(p^\infty)$ を満たすことを示した。

主定理の証明の大きなポイントは 2 つである。1 つ目は、2004 年度の科研費研究で得た、代数体の巡回 Kummer 拡大が正規整数底を持つための必要十分条件である。2 つ目は正規整数底の Galois descent の問題である。これは難しい問題ではあるが主定理の証明に十分役立つような結果が得られた。

(2) 論文④で条件 $H(p)$ を満たす虚 2 次体を決定し、その後、論文①で $H(p)$ を満たす虚

アーベル体を決定した。特に、11 以上の p についてこの条件を満たす虚アーベル体は存在しない。

3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している。

(理由)

「進捗状況」の欄に述べたように、「計画」の(1)、(2)共にほぼ完了している。なお、「進捗状況」で述べた以外の結果もある程度あり、極めて順調に研究を進めていると思う。

4. 今後の研究の推進方策

進捗状況の(1)の最後に述べたように、「概要」(1)の研究は p 冪分体の類数に関する問題と密接に関わることが明らかになった。この問題は plus 部分と minus 部分に分かれる。今後、残された研究時間をこの minus 部分の研究に当てる予定である。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Humio Ichimura, Hilbert-Speiser number fields and the complex conjugation, Journal of the Mathematical Society of Japan, vol. 62, 2010, 83-94、査読有

② Humio Ichimura Hilbert-Speiser number fields and Stickelberger ideals, Journal de Theorie des Nombres Bordeaux, vol. 21, 2009, 589-607、査読有.

③ Humio Ichimura, Note on Galois descent of a normal integral basis of a cyclic extension of degree p , Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, vol. 85, 2009, 160-162、査読有.

④ Humio Ichimura and Hiroki Sumida-Takahashi, On Hilbert-Speiser type imaginary quadratic fields, Acta Arithmetica, vol. 136, 2009, 385-389、査読有.

⑤ Humio Ichimura, Hilbert-Speiser number fields at a prime p inside the p -cyclotomic field, Journal of Number Theory, vol. 128, 2008, 858-864、査読有.

[学会発表] (計 1 件)

市村文男, Hilbert-Speiser number fields and Stickelberger ideals, The Japan-Korea Joint Seminar on Number Theory and Related Topics, 2008年11月14日、東北大学(仙台)