様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２３　年　３　月　３１　日現在

機関番号：１２１０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007～2010
課題番号：１９５４０００５
研究課題名（和文）　Ｈｉｌｂｅｒｔ－Ｓｐｅｉｓｅｒ型の代数体とＳｔｉｃｋｅｌｂｅｒｇｅｒ　Ｉｄｅａｌ
研究課題名（英文）　Hilbert-Speiser number fields and Stickelberger ideals

研究代表者
市村　文男（ICHIMURA HUMIO）
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：００２０３１０９

研究成果の概要（和文）：固定した素数 p と自然数 n について、代数体 F が Hilbert-Speiser 条件 A(p^n)を満たすとは、F 上の exponent が p^n の約数のどんなアーベル拡大 N/F も p-整数環について正規底を持つことをいう。最も主要な結果は、F が A(p^n)を満たすための条件をある種の Stickelberger ideal を用いて記述したことである。

研究成果の概要（英文）：For a fixed prime number p and an integer n, we say that a number field F satisfies the Hilbert-Speiser condition A(p^n) when any abelian extension N/F of exponent dividing p^n has a normal basis with respect to the rings of p-integers. We gave a condition for F to satisfy A(p^n) in terms of a certain Stickelberger ideal.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	600,000	180,000	780,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総　計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：Hilbert-Speiser の定理、 Stickelberger ideal、整数環、ideal 類群、円分体、円分岩澤理論、

１．研究開始当初の背景

素数を一つ固定しそれを p と書く。150 年ほど前に Kummer は p 分体 K に付随する Stickelberger ideal が K の ideal 類群を消すことを示した。これは後に Stickelberger によって一般化され、現代円分体論の基本定理の一つとなっている。100 年ほど前に Hilbert と Speiser は有理数体 Q 上の分岐が高々 tame なアーベル拡大 N/Q は必ず正規整数底を持つことを示した。この２つの定理は一見まったく無関係に見える。しかし、その後、Hilbert は Hilbert-Speiser の定理から Kummer の定理が従うことを示した。Hilbert が与えた２つの定理の関係を逆が成り立つかも含めて極限まで一般化・精密化することを主要な目標とした。

２．研究の目的

（１）自然数を n とし、代数体 F が Hilbert-Speiser 条件 A(p^n)を満たすとは exponent が p^n を割るすべてのアーベル拡大 N/F が p-整数環について正規底を持つことを言う。ここで自然数 a、b に対して a の b 乗を a^b と表すことにする。本来の整数環ではなく p-整数環を扱う理由は、p 冪次の拡大を扱う際はこの方扱いやすくかつより自然

な対象であることによる。Hilbert と Speiser により有理数体 Q はすべての p と n でこの条件を満たすことが知られている。K を F に１の p^n 乗根を添加した体とし、その ideal 類群 C とする。K/F のガロア群を G とする。G に付随する Stickelberger ideal S を古典的な Stickelberger ideal の自然な拡張として定義し、F についての条件 $A(p^n)$と C^S の自明性との関連を明らかにすること。ここで C^S は ideal 類群に S を作用させたものを表す。なお、F=Q の場合に C^S が自明というのが背景欄でふれた Kummer-Stickelberger の定理である。

（２）項目（１）で述べたものと似た問題を p-整数環ではなく本来の整数環で考える。このとき、種々の理由（主に分岐の wild 性の問題）により一般の p 冪次の拡大を扱うのは極めて困難になる。そこで p-次巡回拡大のみを扱う。代数体 F が条件 B(p)を満たすとはすべての tame な p-次巡回拡大 N/F が本来の整数環について正規底を持つことを言う。既に述べたように F=Q の場合はすべての p でこの条件を満たす。虚２次体全体あるいは虚アーベル体全体等の程度広い範囲の代数体の中で条件 B(p)を満たすものを決定することを目指す。

３．研究の方法

（１）上記の目的について n=1 の場合は 2003~2006 年度の科研費研究によりすでに解決している。n が２以上の場合に Stickelberger ideal S を定義することおよび条件 $A(p^n)$から C^S の自明性が従うことを示すことはその自然な拡張である。これを行うためにやはり 2003~2006 年度の科研費研究でえた巡回 Kummer 拡大が正規整数底をもつための必要十分条件を用いる。この条件は一見したところ非常に複雑で扱いにくいものであるが、Stickelberger element との相性は悪くはなく、とくに p 整数環の場合には使い勝手は良い。逆の方向で C^S の自明性から $A(p^n)$を導く際、n が２以上の場合は一般に G の位数が p で割れる（semi-simple でなくなる）ので困難な状況に陥り、n=1 の場合の議論は direct には使えない。正規底に関するある種の Galois descent 問題に帰着させることにより解決させる。手法としてはこれまでの科研費研究で得た成果と円分体論や円分岩澤理論の古典的な諸定理を full に用いて研究を行う。なお、研究の途中で派生した問題も積極的に解決していく。

（２）McCulloh の 1983 年の古典的な結果を用いて Greither、Replogle、Rubin と Srivastav の４人は 1999 年に代数体 F が B(p)を満たすための obstruction の１つは F/Q に於ける p の分岐であることを示した。2003~2006 年度の科研費研究で、このことを用いて虚２次体で条件 B(3)を満たすものを決定した。（Carter 氏もほぼ同時期に同じ結果を得ている。）これに引き続き、虚２次体で比較的小さい p で B(p)を満たすものを決定する。この作業を通して B(p)成立のためのさらなる obstruction を見出して、最終的には、虚アーベル体（または CM 体）で B(p)を満たすものをすべて決定する。（１）と同じく、手法としてはこれまでの科研費研究で得た成果、上述の McCulloh や Greither たちの仕事、および円分体や円分岩澤理論の古典的な諸定理を用いて研究を行う。なお、途中で派生してくる問題も積極的に扱う。

４．研究成果

（１）最終的に任意の基礎体Ｆに対して条件 $A(p^n)$と C^S の自明性が同値であるという美しい定理を得られた。標語的にいえば Hilbert-Speiser=Kummer-Stickelberger という等式を得たことになる。代数体Ｆがすべてのｎで $A(p^n)$を満たす時、Ｆ は条件 $A(p^\infty)$を満たすという。主定理の応用として p=3, 7, 11, 19, 43, 67, 163 の場合にある仮定のもとで虚２次体 $F=Q(\sqrt{-p})$が非常に強い条件 $A(p^\infty)$を満たすことを示した。なお p=2 の場合には $F=Q(\sqrt{-1})$と $Q(\sqrt{-2})$について同様のことを示した。これら９つの虚２次体は有名な類数１の虚２次体であり、これらが Hilbert-Speiser 条件に関して代数体全体の中で特異点的な位置を占めている可能性がある。上記の定理を証明するために自然な形で定義した Stickelberger ideal S の諸性質をとくに解析的類数公式との関連で調べた。さらに、「研究方法」の欄（１）で述べた困難な点は以下の定理を示すことで解決した。「代数体Ｆが条件 $A(p^{n-1})$を満たせば、Ｆはｐ＾ｎ次巡回拡大の p-整数環の正規底についての Galois descent property を持つ。」これは n=1 の場合には無条件に成立し、これを 2003～2006 の科研費研究で用いたことになる。以上が主要な成果でありｐが奇素数の場合は Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux に出した(論文⑤)。なお、p=2 の場合は(p-1)/2 が整数でないという点やガロア群Ｇが一般には巡回群ではない点等の固有の厭らしい事情があるがそれらはすべて巧妙な議論で clear でき、成果は Mathematical Journal of Okayama University に投稿し accept され現在印刷中である（論文①）。

（２）まず高橋浩樹氏との共著論文⑪で 11 以下の素数ｐに対してＢ(p)を満たす虚２次体を決定した。これらはすべて類数が１であった。次に論文⑩である素数ｐで虚２次体Ｆが条件Ｂ(p)を満たせばその類数は１であることを示した。類数１の虚２次体は（１）の部分でも述べたように９つしかないことが知られている。このことを踏まえて、高橋氏との共

著論文⑧で各素数pに対してB(p)を満たす虚２次体を決定した。結論はp=2,3, 5, ７に対して B(p)を満たす虚２次体はそれぞれ 3,4, 2, １個であり、11 以上の p についてはB(p)を満たす虚２次体は存在しない。ここまでの研究で虚アーベル体FがB(p)を満たすためのobstructionとしてはpの分岐のみではなく、F に付随するもろもろのものに作用する複素共役写像があることが判明した。これを踏まえ、論文④で５以上の素数ｐに対してGalois CM 体 F で B(p)を満たすものを決定した。虚２次体以外ではp=5 のとき１つ(1 の 12 乗根の体) のみ、7 以上では存在しない。これを示すのに堀江邦明氏による相対類数が２幂の円分体の決定(1989 年)を用いた。結局、虚アーベル体では１１以上の素数 p では条件B(p)を満たすものは存在しない。吉野健一氏と平林幹人氏による虚アーベル体の相対類数の大きな数表(1981,1982 年)を援用して、素数ｐが 11、13 の場合に条件 B(p)を満たす実アーベル体を１つずつ見つけた。ｐ=11 の場合はconductor が７の３次巡回体、p=13 の場合は$Q(\sqrt{5})$である。これ以上のｐ、たとえば p=17 で、この条件を満たす代数体が存在するかは現段階では全く不明である。なお、上で除外したp=2,3の場合は私の大学院生である吉村雄介君がその学位論文 (2008 年) のなかで扱い、山村健氏による類数１の虚アーベル体決定の成果を用いて、条件B(2)を満たす虚アーベル体と B(3)を満たすアーベル体 (実も含めて) を決定している。以上述べた範囲で B(p)を満たす虚アーベル体の類数は１であるが、ごく最近の Byott、 Carter、Greither、Johnstonたち４人の共著論文のなかで、類数２で条件B(5)を満たす代数体の例が挙げられている。しかしそれはアーベルでもなくＱ上ガロアでもない。

（３）ここでは研究目的および成果の（１）から派生して扱った問題について得られた成果を述べる。アーベル体Ｆ上の円分 Z_p 拡大の n 番目の中間体を F_n と書く。Washington の 1979 年の論文により、ｐと異なる素数ｒについてF_nの類数のｒ-部分は十分大きいｎでは一定であることが知られている。どのくらいｎを大きくすればよいかという問題が自然に生ずるが、この問題の大きなobstructionとしてp-進整数環の中のp-1 乗根の存在がある。特別な場合であるが、p-1の小さい、ｐ=3 や５の時にすべてのｐ幂分体の奇数であることが知られている。論文⑦で対応する結果をp=7 の場合に得た。これは１の３乗根ｚが簡単な関係式 $1+z+z^2=0$ を満たすという事情を用いて証明した。同様のことが１１以上のｐで言えるかは分からない。ところで、堀江邦明氏は 2002 年の論文で有理数体上の円分 Z_p 拡大について、上述のWashington の定理の explicit 化を与えた。中島匠一氏との共著論文②では、この研究結果を用いて、509 以下の素数ｐについて有理数体Ｑの円分 Z_p 拡大の各中間体の類数がすべて奇数であることを計算機の助けをかりて示した。このことと Armitage と Frohlich のある結果を用いると Fermat 型素数 p=17, 257 についてすべての p 幂分体の類数が奇数であることが従う。(計算の途中である種の指標和について興味深い現象も発見したがこれについての考察はまだ出来ていない。) 以上のことを踏まえて、2011 年度以降の研究はｐ分体上の円分 Z_p 拡大の各中間体の類数の non-p-part、とりわけ parity の問題へと展開させていく予定である。その際、前述の堀江氏の仕事を円分岩澤理論の視点で見直すことが大きなポイントになる。

（４）ここでは研究目的および成果の（２）に関連して得られた成果を述べる。ｐは素数とし、ｚは１のｐ乗根とする。1982 年に河本史紀氏は、有理数 a に対して巡回拡大 $Q(z,a^{1/p})/Q(z)$の分岐が高々tame であれば（本来の）整数環について正規底を持つことを示した。これはHilbertの古典的な結果の１つのversionである。ｍを平方因子のない自然数、ｚを１のｍ乗根とする。上記の結果の一般化として論文③で、有理数ａに対して、巡回拡大 $Q(z,a^{1/m})/Q(z)$の分岐が高々tame なら正規整数底を持つことを示した。「研究の方法」の（１）の項目で述べたｍ次巡回 Kummer 拡大が正規整数底を持つための必要十分条件と三宅克哉氏が 1980 年に得た一般単項化定理を効果的に用いた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 11　件)

① 市村文男、Hilbert-Speiser number fields and Stickelberger ideals; the case p=2、Mathematical Journal of Okayama University、査読有、印刷中
② 市村文男、中島匠一、On the 2-part of the ideal class group of the cyclotomic Z_p-extension over the rationals、Abhandlungen aus dem Mathematishen Seminar der Universitat Hamburg、査読有、vol.80、2010、pp.175-182
③ 市村文男、On the integer ring of a Kummer extension generated by a power root of a rational number、Yokohama Mathematical Journal、査読有、vol.55、２０１０，pp.165-170
④ 市村文男、Hilbert-Speiser number fields and the complex conjugation、Journal of the Mathematical Society of Japan、査読有、vol. 62、2010、pp.83-94

⑤ 市村文男、Hilbert-Speiser number fields and Stickelberger ideals、Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux、査読有、vol. 21、2009、pp.589-607
⑥ 市村文男、Note on Galois descent of a normal integral basis of a cyclic extension of degree p、Proceedings of the Japan Academy、査読有、vol.85、2009、pp.160-162
⑦ 市村文男、On the parity of the class number of the 7^nth cyclotomic field、Mathematica Slovaca、査読有、vol. 59、2009、pp.357-364
⑧ 市村文男、高橋浩樹、On Hilbert-Speiser type imaginary quadratic fields、Acta Arithmetica、査読有、vol.136、2009、pp.385-389
⑨ 市村文男、Hilbert-Speiser number fields for a prime p inside the p-cyclotomic field、Journal of Number Theory、査読有、vol. 128、2008、pp.858-864
⑩ 市村文男、Note on imaginary quadratic fields satisfying the Hilbert-Speiser condition at a prime p、Proceedings of the Japan Academy、査読有、vol.83、2007、pp.88-91
⑪ 市村文男、高橋浩樹、Imaginary quadratic fields satisfying the Hilbert-Speiser condition for a small prime p、Acta Arithmetica、査読有、vol.127、2007、pp.179-191

〔学会発表〕(計４　件)
① 市村文男、ある種の実アーベル体の類数について、研究集会「解析数論―複素関数の値の分布と性質を通して」、京都大学・数理解析研究所、2010 年 10 月 7 日
② 市村文男、アーベル体上の円分Z_p拡大の類数のnon-p-partについて、福岡数論研究集会、九州大学、2010 年 8 月 25 日
③ 市村文男、Hilbert-Speiser number fields and Stickelberger ideals、Japan-Korea Joint Seminar on Number Theory and Related Topics、東北大学、2008 年 11 月 14 日
④ 市村文男、Hilbert-Speiser number fields and Stickelberger ideals、東京理科大学理工学部数学科談話会、東京理科大学、2008 年 10 月 17 日

６．研究組織
(1)研究代表者
市村　文男 (ICHIMURA HUMIO)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：00203109