

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007 ~ 2010

課題番号：19540009

研究課題名 (和文) j -重複度の計算とその応用研究課題名 (英文) Computing j -multiplicity and its application

研究代表者

西田 康二 (NISHIDA KOJI)

千葉大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60228187

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：可換環・次数付き環・イデアル・重複度

1. 研究計画の概要

極大イデアル m を持つ局所環 R の m -準素イデアル I に対して定まる重複度は可換環論における古典的な不変量として知られ、多様な研究の中で有効な道具として用いられてきたのであるが、1993 年に Achilles と Manaresi は I が m -準素でない場合にも重複度の理論に相当する理論の構成を目指し、新しい不変量 $j(I)$ を導入した。その不変量は現在では「 j -重複度」と呼ばれ、いくつかの興味深い結果が既に報告されている。しかし、その理論を古典的な重複度に関するものと比べてみると、まだまだ深さという点で大きく見劣りすると言わざるを得ない状況であり、今後の発展が期待される未開拓な分野であると思われる。この研究では、与えられたイデアル I に対して $j(I)$ を計算する為の実用的方法を確立し、願わくば、 j -重複度の理論を従来の重複度に関するものと比肩し得るレベルまで発展させることを目的とする。

2. 研究の進捗状況

初年度は主に基礎的部分の整理に充てた。今回の研究課題の方向性を十分に意識しながら、既に知られている結果の見直しを行い、改善すべき点を確認した。又、 j -重複度の定義についても再検討し、我々の目的の為にはどのような定義を採用することが最適であるかを慎重に判断した。その結果、 d -次元の有限生成 R -加群 M を考えたとき、イデアル I の M に関する j -重複度 $j(I, M)$ の定義としては、 $I^n M / I^{n+1} M$ の m に関する 0 次局所コホ

モロジー加群の長さに $(d-1)!/n^{d-1}$ を掛け $n \rightarrow \infty$ としたときの極限值を採用することとした。

2 年目の研究では I の元 a を「一般的」ととり、 $j(I, M)$ の計算を剰余加群 $M' = M/aM$ に関する j -重複度 $j(I, M')$ の計算に帰着する方法を探った。勿論、 a を「一般的」ととれば a は I の上表元であってさらに M に関する I の minimal reduction の極小生成系の一部となる。その結果、 I と M の組についての多くの情報が I と M' の組に遺伝し、さらに M' に関する I の analytic spread は M に関する I のそれよりも小さくなる。この年度の研究では、任意の局所環 R と任意の有限生成 R -加群 M に対して、イデアル I に何ら条件を付することなく j -重複度 $j(I, M)$ を計算する為の公式を与えた。 M の次元が $d > 0$ であれば、 I の中から $d-1$ 個の「一般的」な元をとり、それらから定まる或る R -加群の長さを測る形で記述することができた。

3 年目の研究では、前年度に得られた公式を具体的なイデアルに適用して j -重複度の計算を実行してみた。「一般的な元をとる」という言葉は非常に論理的・抽象的な表現であって、具体例においてそれを実行することは或る程度の困難が予想されたのだが、例えば 3 次元 Cohen-Macaulay 局所環 S のパラメータ系 x, y, z をとり、剰余環 $R = S/(x^2-yz)S$ においてイデアル $I = (x, y)R$ を考えると $j(I)$ は $S/(x, y, z)S$ の長さに一致することが分かった。この結果は、 S が $m = (x, y, z)S$ を極大イデアルにもつ正則局所環の場合には $j(I) = 1$ となることを示しており、極大イデアルと異なるイデアルであっても j -重複度が 1 となり得ることは大変興味深い。

3. 現在までの達成度

- ② おおむね順調に進展している。
(理由)

研究計画調書の中に述べてある年度ごとの目標を順調にクリアし、期待した結果を得ている。

4. 今後の研究の推進方策

j -重複度をもつ意味を明らかにしたい。 $j(I)$ の値が小さいときには R と I にどのような制約が生じるかを調べることや、特殊なイデアル I に対する $j(I)$ の値から R の環論的性質を引き出すことなどが課題として考えられる。又、これまでに完成した理論を再検証することにより、研究代表者が以前の研究で到達することのできた内容を別の観点から再確認し、さらに前進する為の展望を開きたいと思う。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① S. Goto, K. Nishida and K. Ozeki, Sally modules of rank one, Michigan Mathematical Journal, Vol. 57, 2008, 359-381, 査読有.
- ② S. Goto, K. Nishida and K. Ozeki, The structure of Sally modules of rank one, Mathematical Research Letters, vol. 15, 2008, 881-892, 査読有.
- ③ Y. Kinoshita, K. Nishida, K. Sakata and R. Shinya, An upper bound on the reduction number of an ideal, Communications in Algebra, Vol. 37, 2009, 1690-1699, 査読有.
- ④ K. Nishida and B. Ulrich, Computing j -multiplicity, Journal of Pure and Applied Algebra に掲載予定, 査読有.

[学会発表] (計3件)

- ① 西田康二, An upper bound of reduction number of an ideal, 第29回可換環論シンポジウム, 平成19年11月20日, 愛知厚生年金会館.
- ② 西田康二, On the third symbolic powers of prime ideals defining space monomial curves, Commutative Algebra and Its Interactions with Algebraic Geometry, 平成20年9月30日, CIRM (フランス・ルミニ).
- ③ 西田康二, Noetherian symbolic Rees

algebras in positive characteristic case, The 5th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 平成22年1月9日, Vietnamese Academy of Science and Technology (ベトナム・ハノイ).

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]