様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 12 日現在

機関番号：12501
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2007 ～ 2010
課題番号：19540009
研究課題名（和文）　j-重複度の研究とその応用

研究課題名（英文）　Computing j-multiplicity ant its application

研究代表者
西田　康二（NISHIDA KOJI）
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60228187

研究成果の概要（和文）：局所環の重複度の理論は可換環論における古典的理論として重要な役割を果たしてきたが，適用できるイデアルは極大イデアルのベキ乗を含むものに限られていた．そこで「j-重複度」という，より一般化された不変量が導入されたのだが，具体的に与えられたイデアルに対してその値を計算することには多く困難が伴っていた．本研究ではこの問題に取り組み，実用的な計算法を確立することができた．

研究成果の概要（英文）：Although the theory of multiplicity of local rings is very important as a classical theory in commutative algebra, but it can be applied to only ideals containing some power of the maximal ideal. Hence a generalized invariant named “j-multiplicity” was introduced. However, it was really difficult to compute its value. In this research, we established a practical method for computing the j-multiplicity of a given ideal.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,200,000	360,000	1560,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：可換環論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：可換環、次数付き環、イデアル、重複度

１．研究開始当初の背景

極大イデアル m を持つ局所環 A の m-準素イデアル I に対して定まる重複度 e(I) は可換環論における古典的な不変量として知られ，多様な研究の中で有効な道具として用いられてきたのであるが，1993 年に Achilles と Manaresi は I が m-準素でない場合にも重複度に相当する理論の構成を目指し，新しい不変量 j(I) を導入した．その不変量は現在では「j-重複度」と呼ばれ，いくつかの興味深い結果が既に報告されている．

しかし，その理論を古典的な重複度に関するものと比べると，まだまだ深さという点で大きく見劣りすると言わざるを得ない状況であり，さらなる発展が期待される未開拓な分野であると思われた．

２．研究の目的

この研究では，与えられたイデアル I に対して j(I) を計算する為の実用的方法を確立し，j-重複度の理論を従来の重複度に関する

ものと比肩し得るレベルまで発展させることを目的とした．

j-重複度の計算方法がある程度確立されれば，次のステップとして「どの様な応用があるか？」が問題となる．例えば，j(I)の値が小さい場合に，A と I に対して如何なる制約が生じるかを調べることは重要な問題であるし,何らかの特別なイデアル I についてはj(I)の値から A の重要な環論的性質を導くことも可能であろう．j-重複度の理論を研究する意義は，その様な方向で良い結果が期待されるということにあり，具体的な計算方法を見出す作業は，その結果を応用する上で必要不可欠なことである．

３．研究の方法

局所環(A, m)の Krull 次元が d > 0 で I が m-準素のとき，有限生成 A-加群 M の I に関する重複度 e(I, M)は

$$(d - 1)! / n^{d-1} \cdot \ell_A(I^nM / I^{n+1}M)$$

で n→∞としたときの極限値として定義される．但し，$\ell_A(*)$は A-加群 * の長さを表している．特に e(I, A)は e(I)と書くことにする．

この不変量は多くの優れた性質を持ち，可換環論や代数幾何学の中で重要な役割を果たしてきた．例えば，環 A の正則性を e(m) = 1 であるかどうかで判定することや，A の Cohen-Macaulay 性をパラメーターイデアル Q に関する等式 $e(Q) = \ell_A(A / Q)$を通して調べるということが可能である．

このように重複度は大変便利な不変量であるので，それに相当する概念が，必ずしも m-準素でないイデアル I に対して確立されれば，可換環論に大きな進展をもたらすことが期待される．j-重複度 j(I, M)はその様な要請に応える形で登場してきた不変量の１つであり，次の様な値

$$(d - 1)! / n^{d-1} \cdot \ell_A(H^0(I^nM / I^{n+1}M))$$

を n→∞としたときの極限値として定義される値である．但し，$H^0(*)$は A-加群 * の m に関する 0 次局所コホモロジー加群を表している．又，j(I, A)は j(I)と書くことにする．

容易に分かる様に, I が m-準素の場合には,任意の n に対して

$$H^0(I^nM / I^{n+1}M) = I^nM / I^{n+1}M$$

となるので，j(I, M) = e(I, M)が成り立つのである．さらに，こうして定義された j-重複度は古典的な重複度と共通した性質をいくつか持つことが知られている．

例えば，A-加群の完全列

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

が与えられれば

$$j(I, M) = j(I, L) + j(I, N)$$

が成り立ち，これから j-重複度についての加法公式が従うことが分かる．又，A が quasi-unmixed であるという条件の下では，I に含まれるイデアル J が I の reduction となる為には，J ⊆ I であってかつ I を含む任意の素イデアル P に対して $j(IR_P) = j(JR_P)$となることが必要十分であることも示されている．

この様に j-重複度についてはいくつかの優れた性質が既に見出されているのだが，その一方で，具体的に与えられたイデアルに対して j-重複度を計算する方法に関しては，あまり良い方法が確立されていないというのが現状であった．唯一，j-重複度をある加群の長さとして与える公式は知られていたが，環やイデアルに強い条件を仮定した下での結果である為，もっと一般的な状況での公式が強く求められていた．

j-重複度の計算を実行するには，如何にして d の値が小さい場合へ帰着させるかが問題となってくるのだが，それは I の「一般的」な元 a を取り, 剰余環 A / aA に移行するという議論でクリアされる．「一般的」な元を取って問題をより単純な場合に還元させるという技術は古典的な重複度の理論で盛んに用いられてきたのだが，j-重複度の研究においても基本的なアイディアの１つとして採用されている．しかし，先行する研究では I の元 a の取り方がどの程度「一般的」であれば良いかが明確になっておらず，非常に強い仮定の下でのみ j-重複度の公式の成立が知られていた．

この研究では, I の元 a に必要とされる「一般性」をぎりぎりまで追求することにより，任意の局所環 A と任意の有限生成 A-加群 M に対して，I に何ら条件を付することなく j(I, M)を計算する為の公式を与えることを目指した．

４．研究成果

(1) 2007 年度の成果

主に基礎的部分の整理に充てた．まず最初に，今回の研究課題の方向性を十分に意識しながら，既に知られている結果の見直しを行い，改善すべき点を確認した．又，j-重複度の定義についても再検討してみた．実は，Achilles と Manaresi が与えた定義と Flenner, O'Carroll 及び Vogel が与えた定義は，同じ値を持つ不変量にはなるものの見かけ上は異なっているのである．後者は前者の 6 年後に発表された論文に書いてあるのだが,その間にどのような試行錯誤が行われたのかを調べ, その上で，我々の目的の為にはどの様な定義を採用することが最良であるかを慎重に判断した．その結果，まず局所環 G_0 上の次数付環

$$G = \oplus_{n \geq 0} G_n$$

で $G = G_0[G_1]$なるものが与えられたとき, 各 G_n の G_0-加群としての 0 次局所コホモロジー

加群を用いて j-重複度 j(G)を定義し，局所環 A のイデアルに対しては，随伴次数環

$$\mathrm{gr}_I A = \oplus_{n\geqq 0} I^n / I^{n+1}$$

を通して j(I)を定義するのが最良なのではないかという結論に至った．即ち

$$j(I) = j(\mathrm{gr}_I A)$$

と定めるのである．その結果 j(G)＝j(G／fG)をみたす斉次元 $f \in G_1$ はどの程度「一般的」であれば良いかという問題をより柔軟な状況で議論することができ，明確な解答を出すことができた．

(2) 2008 年度の成果

a∈I を「一般的」にとり，j(I, M)の計算を剰余加群 M/aM に関する j-重複度

$$j(I, M/aM)$$

の計算に帰着する方法を探った．勿論，a を「一般的」にとれば，a は I の上表元であってさらに M に関する I の minimal reduction の極小生成系の一部となる．その結果，I と M の組についての多くの情報が I と M/aM の組に遺伝し,さらに M/aM に関する I の anlytic spread は M に関する I のそれよりも小さくなる．

この年度の研究では，任意の局所環 R と任意の有限生成 R-加群 M に対して，イデアル I に何ら条件を付することなく j-重複度 j(I, M)を計算する為の公式を与えた．

M の次元が d＞0 であれば，I の中から d－1 個の「一般的」な元 $a_1, \cdots, a_{d-1}$ をとり，それらから定まる R-加群

$$M / ((a_1, \cdots, a_{d-1})M : I^\infty)$$

の長さを測る形で記述することができるのである．

(3) 2009 年度の成果

前年度までの研究により，局所環 R において与えられたイデアル I の j-重複度を具体的に計算するには，I の d－1 個の「一般的」な元をとり，それらから定まるある R-加群の長さを測れば良いことが分かった．

この年度は，その公式を具体的なイデアルに適用して j-重複度の計算を実行してみた．「一般的な元をとる」という言葉は非常に論理的・抽象的な表現であって，具体例においてそれを実行することはある程度の困難が予想されたのだが，例えば 3 次元 Cohen-Macaulay 局所環 S のパラメータ系 x, y, z をとり，剰余環

$$R = S / (x^2 - yz)S$$

においてイデアル I = (x, y)R を考えると，j(I)は S / (x , y, z)S の長さに一致することが分かった．

この結果は S が m = (x, y, z)S を極大イデアルにもつ正則局所環の場合には j(I) = 1 となることを示しており，極大イデアルと異なるイデアルであっても j-重複度が 1 となり得る事は大変興味深い．

また，形式的ベキ級数環 R＝K[[x, y, z]]において space monomial curve :

$$x = t^k,\ y = t^\ell,\ z = t^m$$

の定義イデアルを P とする（即ち，環の準同型写像

$$f : K[[x, y, z]] \to S = K[[t^k, t^\ell, t^m]]$$

$$(f(x) = t^k,\ f(y) = t^\ell,\ f(z) = t^m)$$

の核を P とする）と j(I) は

$$\min\{ \ell_S(S/\omega) \mid \omega \text{はSの正準イデアル}\}$$

に一致することが分かった．

(4)2010 年度の成果

この年度の研究では前年度までに得られた結果を踏まえ，j-重複度を計算することの意義を明らかにした．$(a_1, \cdots, a_{d-1}) : I^\infty$ による剰余環の長さを測るということが持つ意味の考察を通し，例えば，j(I)の値が小さいときには R と I にどのような制約が生じるかを調べた．さらに，特殊なイデアル I に対する j(I)の値から R の環論的性質を引き出すことなどについて一定の結果を得た．

又，これまでに完成した理論を再検証することにより，研究代表者が以前の研究で到達した内容を別の観点から再確認することができた．その結果として，さらに前進する為の展望も開けてきたと認識している．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 4 件)

① <u>Koji Nishida</u>, Bernd Ulrich, Computing j-multiplicity, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, Vol. 214, No. 12, 2010, pp. 2101-2110.

② Y. Kinoshita, <u>Koji Nishida</u>, K. Sakata, R. Shinya, An upper bound on the reduction number of an ideal, Communications in Algebra, 査読有, Vol. 37, No.5 , 2009, pp. 1690-1699.

③ Shiro Goto, <u>Koji Nishida</u>, Kazuho Ozeki, The structure of Sally modules of rank one, Mathematical Research Letters, 査読有, Vol. 15, No. 5, 2008, pp. 881-892.

④ Shiro Goto, <u>Koji Nishida</u>, Kazuho Ozeki, Sally modules of rank one, Michigan Mathematical Journal, 査読有, Vol. 57 , 2008, pp. 359-381.

〔学会発表〕(計 7 件)

① <u>Koji Nishida</u>, Noetherian and non-Noetherian symbolic Rees algebras, The 6th Japan-Vietnam Joint Seminar on

Commutative Algebra, 2010 年 12 月, 生産性国際交流センター, 神奈川県逗子市.

② Koji Nishida, Noetherian symbolic Rees algebras in positive characteristic case, The 5th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2010 年 1 月, Institute of Mathematics, Vietnamese Academy of Science and Technology, Hanoi (Vietnam).

③ Koji Nishida, On the third symbolic powers of prime ideals defining space monomial curves, Commutative Algebra and Its Interactions with Algebraic Geometry, 2008 年 9 月, CIRM, Luminy (France).

④ Koji Nishida, An upper bound on the reduction number of an ideal, International Conference on Commutative Algebra, 2008 年 3 月, 開港記念会館, 神奈川県横浜市.

⑤ 西田康二, On the third symbolic powers of prime ideals defining space monomial curves, 第 30 回可換環論シンポジウム, 2008 年 11 月, 国民宿舎虹の松原ホテル, 佐賀県唐津市.

⑥ 西田康二, An upper bound on the reduction number of an ideal, 第 29 回可換環論シンポジウム, 2007 年 11 月, 愛知厚生年金会館ウェルシティなごや, 愛知県名古屋市.

⑦ Koji Nishida, An upper bound on the reduction number of an ideal, The 3rd Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2007 年 12 月, Institute of Mathematics, Vietnamese Academy of Science and Technology, Hanoi (Vietnam).

〔図書〕(計 0 件)
〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
西田　康二（NISHIDA KOJI）
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60228187

(2)研究分担者
蔵野　和彦（KURANO KAZUHIKO）
明治大学・理工学研究科・教授
研究者番号：90205188
（H19 年度）

(3)連携研究者
蔵野　和彦（KURANO KAZUHIKO）
明治大学・理工学研究科・教授
研究者番号：90205188
（H20→H22 年度）